21. Geometrie endomorfismů a kanonické tvary

21.1. Geometrie endomorfismů

Věta 1. *Nechť $\varphi, \psi : V \to V$ jsou lineární zobrazení, $U \subseteq V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ i ψ. Pak U je invariantní vzhledem k libovolné lineární kombinaci $p \cdot \varphi + q \cdot \psi$, $p, q \in \mathbb{K}$.*

Důkaz. Pro $\mathbf{u} \in U$ máme

$(p \cdot \varphi + q \cdot \psi)(\mathbf{u}) = (p \cdot \varphi)(\mathbf{u}) + (q \cdot \psi)(\mathbf{u}) = p \cdot \varphi(\mathbf{u}) + q \cdot \psi(\mathbf{u}) \in U$. ■

Věta 2. *Nechť* $\varphi : V \to V$ *je endomorfismus,* $\dim V = m$. *Pak platí*

1. *Ve* V *existuje invariantní podprostor dimenze* n *právě, když existuje báze* V*, ve které má* φ *matici tvaru* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$*, s bloky rozměrů* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times(m-n)}, C \in \mathbb{K}^{(m-n)\times(m-n)}$.
2. $V = V_1 \oplus V_2$ *je součtem dvou invariantních podprostorů právě, když má* φ *ve vhodné bázi matici tvaru* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$*, s bloky rozměrů* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{K}^{(m-n)\times(m-n)}$.

Definice. O maticích z prvního tvrzení předchozí věty říkáme, že jsou *polorozpadlé*, matice z druhého tvrzení jsou *rozpadlé*. Obecněji, polorozpadlou maticí rozumíme blokově horní trojúhelníkovou matici, rozpadlá matice je blokově diagonální.

Definice. Lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že iterované zobrazení φ^k je identicky nulové. Nejmenší číslo k s touto vlastností se nazývá *stupněm nilpotentnosti* zobrazení φ. $\varphi : V \to V$ se nazývá *cyklické*, jestliže existuje báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru V taková, že $\varphi(\mathbf{u}_1) = 0$ a $\varphi(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_{i-1}$ pro všechna $i = 2, \ldots, n$. Jinými slovy, matice φ v této bázi je tvaru $\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$.

Poznámka. Je-li $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$, pak pro každé přirozené k $\varphi^k(\mathbf{v}) = \lambda^k \cdot \mathbf{v}$. Zejména tedy může spektrum nilpotentního zobrazení obsahovat pouze nulový skalár (a ten tam vždy je).

Přímo z definice plyne, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní, navíc je jeho stupeň nilpotentnosti roven dimenzi prostoru V.

Definice. Nechť $U \subseteq V$ je vektorový podprostor. Na množině všech vektorů ve V definujeme ekvivalenci takto: $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ právě tehdy, když $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in U$.

Množina V/U tříd této ekvivalence, spolu s operacemi definovanými pomocí reprezentantů, tj. $[\mathbf{v}] + [\mathbf{w}] = [\mathbf{v} + \mathbf{w}]$, $a \cdot [\mathbf{u}] = [a \cdot \mathbf{u}]$, tvoří vektorový prostor, který nazýváme *faktorový vektorový prostor* prostoru V podle podprostoru U.

Třídy (vektory) ve faktorovém prostoru V/U budeme často označovat jako formální součet jednoho reprezentanta se všemi vektory podprostoru U, např. $\mathbf{u} + U \in V/U$, $\mathbf{u} \in V$. Nulový vektor ve V/U je právě třída $0 + U$, tj. vektor $\mathbf{u} \in V$ reprezentuje nulový vektor ve V/U právě, když je $\mathbf{u} \in U$.

Poznámka. $V/\{0\} \cong V$, $V/V \cong \{0\}$ a faktorový prostor roviny $\mathbb{R}^2$ podle libovolného jednorozměrného podprostoru (každý jednorozměrný podprostor $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je přímka procházející počátkem, třídy ekvivalence jsou rovnoběžky s touto přímkou).

Lemma 3. *Nechť* $U \subseteq V$ *je vektorový podprostor a* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *je taková báze* V*, že* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ *je báze* U*. Pak* $\dim V/U = n - k$ *a* $\mathbf{u}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{u}_n + U$ *je báze* V/U*.*

Důkaz. $V = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$, a tedy i $V/U = \langle \mathbf{u}_1 + U, \ldots, \mathbf{u}_n + U \rangle$. Přitom je ale prvních k generátorů nulových, takže je $V/U = \langle \mathbf{u}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{u}_n + U \rangle$. Předpokládejme, že $a_{k+1} \cdot (\mathbf{u}_{k+1} + U) + \cdots + a_n \cdot (\mathbf{u}_n + U) = (a_{k+1} \cdot \mathbf{u}_{k+1} + \cdots + a_n \cdot \mathbf{u}_n) + U = 0 \in V/U$. To je ale ekvivalentní příslušnosti lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$ do podprostoru U. Protože U je generováno zbylými vektory, je nutně tato kombinace nulová, tj. všechny koeficienty a_i jsou nulové. ∎

Fakt. Nechť $U \subseteq V$ je invariantní podprostor vzhledem k lineárnímu zobrazení $\varphi : V \to V$ a nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je taková báze V, že prvních k vektorů této báze je bazí U. V této bázi má φ polorozpadlou matici $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Platí

1. Zobrazení φ indukuje lineární zobrazení $\varphi_{V/U} : V/U \to V/U$, $\varphi_{V/U}(\mathbf{v} + U) = \varphi(\mathbf{v}) + U$ s maticí D v indukované bázi $\mathbf{u}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{u}_n + U$ na V/U.

2. Charakteristický polynom $\varphi_{V/U}$ dělí charakteristický polynom φ.

Věta 4. Schurova věta o triangularizaci *Nechť* V *je vektorový prostor nad* $\mathbb{K}$ *dimenze* n *a nechť* $\varphi : V \to V$ *je lineární zobrazení, jehož spektrum obsahuje* n *prvků (tj. všechny kořeny charakteristického polynomu leží v* $\mathbb{K}$*). Pak existuje posloupnost invariantních podprostorů* $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ *s dimenzemi* $\dim V_i = i$*. V bázi* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *prostoru* V *takové, že* $V_i = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle$ *má* φ *horní trojúhelníkovou matici:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$ *kde* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *je posloupnost prvků spektra.*

Důkaz. Konstrukci podprostorů V_i provedeme induktivně. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou prvky ve spektru zobrazení φ, tzn. charakteristický polynom zobrazení φ je tvaru $(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Zvolme $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle$, kde u_1 je libovolný vlastní vektor s vlastní hodnotou λ_1. Podle předešlé poznámky je charakteristický polynom zobrazení φ_{V/V_1} tvaru $(\lambda - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$. Předpokládejme, že jsme již sestrojili lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ a invariantní podprostory $V_i = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i \rangle$, $i = 1, \dots, k < n$, takové, že charakteristický polynom φ_{V/V_k} je tvaru $(\lambda - \lambda_{k+1}) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)$ a $\varphi(\mathbf{u}_i) \in (\lambda_i \cdot \mathbf{u}_i + V_{i-1})$ pro všechny $i = 1, \dots, k$.

Zejména tedy existuje vlastní vektor $\mathbf{u}_{k+1} + V_k \in V/V_k$ zobrazení φ_{V/V_k} s vlastní hodnotou λ_{k+1}. Uvažme nyní prostor $V_{k+1} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1} \rangle$. Kdyby byl vektor $\mathbf{u}_{k+1}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, znamenalo by to, že $\mathbf{u}_{k+1} + V_k$ je nulová třída v V/V_k, to ale není možné. Je proto $\dim V_{k+1} = k + 1$.

Zbývá studovat indukované zobrazení $\varphi_{V/V_{k+1}}$. Charakteristický polynom tohoto zobrazení je stupně $n-k-1$ a dělí charakteristický polynom zobrazení φ. Přitom doplněním vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k+1}$ do báze V dostaneme polorozpadlou matici zobrazení φ s horní trojúhelníkovou submaticí B v horním levém rohu, jejíž diagonální prvky jsou právě skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$. Proto mají kořeny charakteristického polynomu indukovaného zobrazení požadované vlastnosti. $\blacksquare$

Poznámka. Pokud existuje rozklad celého prostoru V na přímý součet vlastních podprostorů, existuje báze z vlastních podprostorů a předchozí věta vlastně neříká vůbec nic zajímavého.

Její síla ovšem spočívá v tom, že jediným jejím předpokladem je existence $\dim V$ kořenů charakteristického polynomu. To je ovšem zaručeno, je-li číselné těleso $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, např. pro komplexní čísla $\mathbb{C}$.

Přímým důsledkem pak jsou zajímavá tvrzení o determinantu a stopě zobrazení: *jsou vždy součinem, resp. součtem prvků ve spektru.*

Tuto skutečnost můžeme použít i pro všechny reálné matice. Můžeme je totiž vždy považovat za komplexní, spočítat potřebné, a protože determinant i stopa jsou algebraické výrazy v prvcích matice, výsledkem budou právě hledané reálné hodnoty.

21.2. Kořenové prostory

Zavedeme nyní jemnější nástroj na popis geometrických vlastností lineárních zobrazení, tzv. kořenové podprostory.

Definice. Nenulový vektor $\mathbf{u} \in V$ se nazývá *kořenovým vektorem* lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$, jestliže existuje $\lambda \in \mathbb{K}$ a celé číslo $k > 0$ takové, že $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{u}) = 0$, tj. k-tá iterace uvedeného zobrazení zobrazuje $\mathbf{u}$ na nulu. Množinu všech kořenových vektorů příslušných k pevnému skaláru λ doplněnou o nulový vektor nazýváme *kořenovým prostorem* příslušným ke skaláru $\lambda \in \mathbb{K}$, značíme $\mathcal{R}_\lambda$.

Je-li u kořenový vektor a k z definice je vybráno nejmenší možné, pak $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k-1}(\mathbf{u})$ je vlastní vektor s vlastní hodnotou λ. Je tedy $\mathcal{R}_\lambda = \{0\}$ pro všechny skaláry λ, které neleží ve spektru zobrazení φ.

Zejména tedy

$$\mathcal{R}_\lambda = \{\mathbf{u} \in V : (\exists \lambda \in \mathbb{K})(\exists k > 0)(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{u}) = 0\}.$$

Věta 5. *Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Platí*

1. *Pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ je $\mathcal{R}_\lambda \subseteq V$ vektorový podprostor.*
2. *Pro každé $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ je $\mathcal{R}_\lambda$ invariantní vzhledem k lineárnímu zobrazení $(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)$, zejména tedy je $\mathcal{R}_\lambda$ invariantní vzhledem k φ.*
3. *Je-li $\mu \neq \lambda$, pak $(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je invertibilní.*
4. *Zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ je nilpotentní.*

Důkaz. (1) Ověření vlastností vektorového podprostoru je snadné.

(2) Předpokládejme, že $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{u}) = 0$ a uvažme $\mathbf{v} = (\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u})$. Pak

$$\begin{aligned}
(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{v}) &= (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k((\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) + (\lambda - \mu) \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) \\
&= (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k+1}(\mathbf{u}) + (\lambda - \mu) \cdot (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{u}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(3) Je-li $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$, pak

$$(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) = (\varphi - \mu \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{u}) + (\mu - \lambda) \cdot \mathbf{u} = (\mu - \lambda) \cdot \mathbf{u}$$

Odtud $0 = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^k(\mathbf{u}) = (\mu - \lambda)^k \cdot \mathbf{u}$ a je tedy nutně $\mathbf{u} = 0$ pro $\lambda \neq \mu$.

(4) Zvolme bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ podprostoru $\mathcal{R}_\lambda$. Protože podle definice existují čísla k_i taková, že $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{k_i}(\mathbf{e}_i) = 0$, je nutně celé zobrazení $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)|_{\mathcal{R}_\lambda}$ nilpotentní. ■

Věta 6. *Nechť* $\varphi : V \to V$ *je lineární. Součet kořenových prostorů*

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{R}_{\lambda_k}$$

příslušných různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *je přímý. Navíc je pro každou vlastní hodnotu* λ *dimenze podprostoru* $\mathcal{R}_\lambda$ *rovna její algebraické násobnosti.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí přes počet k kořenových prostorů. Předpokládejme, že tvrzení vždy platí pro méně než k prostorů a že pro vektory $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{R}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathcal{R}_{\lambda_k}$ platí $\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_k = 0$. Pro vhodné j pak $(\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(\mathbf{u}_k) = 0$ a zároveň jsou $\mathbf{y}_i = (\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(\mathbf{u}_i)$ nenulové vektory v R_i, $i = 1, \dots, k-1$, pokud $\mathbf{u}_i$ jsou nenulové, viz. předchozí věta.

Přitom ale

$$\mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} (\varphi - \lambda_k \cdot \mathrm{id}_V)^j(\mathbf{u}_i) = 0$$

a tedy podle indukčního předpokladu jsou všechny $\mathbf{y}_i$ nulové. Pak ovšem i $\mathbf{u}_k = 0$ a lineární nezávislost je dokázána.

Zbývá ukázat, že dimenze každého kořenového prostoru $\mathcal{R}_\lambda$ je rovna algebraické násobnosti kořenu λ charakteristického polynomu. Nechť tedy je λ vlastní hodnota φ, označme $\bar{\varphi}$ zúžení $\varphi|_{\mathcal{R}_\lambda}$ a $\psi : V/\mathcal{R}_\lambda \to V/\mathcal{R}_\lambda$ nechť je zobrazení indukované φ na faktorovém prostoru. Předpokládejme, že dimenze $\mathcal{R}_\lambda$ je menší než násobnost kořenu λ charakteristického polynomu.

Protože charakteristický polynom zobrazení ψ dělí charakteristický polynom zobrazení φ, znamená to, že λ je i vlastní hodnotou zobrazení ψ. Nechť $(\mathbf{v} + \mathcal{R}_\lambda) \in V/\mathcal{R}_\lambda$ je příslušný vlastní vektor, tj. $\psi(\mathbf{v} + \mathcal{R}_\lambda) = \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathcal{R}_\lambda)$, což podle definice značí $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_\lambda$ a $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$ pro vhodné $\mathbf{w} \in \mathcal{R}_\lambda$. Máme tedy $\mathbf{w} = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\mathbf{v})$ a $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^j(\mathbf{w}) = 0$ pro vhodné j. Celkem tedy $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)^{j+1}(\mathbf{v}) = 0$, což je ve sporu s volbou $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}_\lambda$. Tím jsme dokázali, že dimenze $\mathcal{R}_\lambda$ je rovna násobnosti kořene λ charakteristického polynomu φ. $\blacksquare$

Důsledek 7. *Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \to V$, jehož celé spektrum je v $\mathbb{K}$, je $V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_n}$ přímým součtem kořenových podprostorů. Zvolíme-li vhodně báze těchto podprostorů, pak φ má v této bázi blokově diagonální tvar s horními trojúhelníkovými maticemi v blocích a vlastními hodnotami λ_i na diagonále.*

Věta 8. *Nechť $\varphi : V \to V$ je nilpotentní lineární zobrazení. Pak existuje rozklad V na přímý součet podprostorů $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ takových, že zúžení φ na kterýkoliv z nich je cyklické.*

Důkaz. Ověření spočívá v konstrukci takové báze prostoru V, že akce zobrazení φ na bázových vektorech přímo ukazuje rozklad na cyklická zobrazení.

Nechť k je stupeň nilpotentnosti zobrazení φ a označme $P_i = \mathrm{Im}(\varphi^i)$, $i = 0, \dots, k$, tzn.

$$\{0\} = P_k \subset P_{k-1} \subset \cdots \subset P_1 \subset P_0 = V.$$

Vyberme libovolnou bázi $\mathbf{e}_1^{k-1}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-1}$ prostoru P_{k-1}, kde $p_{k-1} > 0$ je dimenze P_{k-1}. Z definice plyne, že $P_{k-1} \subset \mathrm{Ker}\varphi$, tj. vždy $\varphi(\mathbf{e}_j^{k-1}) = 0$.

Předpokládejme, že $P_{k-1} \neq V$. Protože $P_{k-1} = \varphi(P_{k-2})$, nutně existují v P_{k-2} vektory $\mathbf{e}_j^{k-2}$, $j = 1, \ldots, p_{k-1}$, takové, že $\varphi(\mathbf{e}_j^{k-2}) = \mathbf{e}_j^{k-1}$. Předpokládejme

$$a_1 e_1^{k-1} + \cdots + a_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-1} + b_1 e_1^{k-2} + \cdots + b_{p_{k-1}} e_{p_{k-1}}^{k-2} = 0.$$

Aplikací zobrazení φ na tuto lineární kombinaci získáme $b_1 \mathbf{e}_1^{k-1} + \cdots + b_{p_{k-1}} \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-1} = 0$, proto jsou všechny $b_j = 0$. Pak ale i $a_j = 0$, protože se jedná o kombinaci bázových vektorů. Celkem jsme tedy ověřili lineární nezávislost všech $2p_{k-1}$ zvolených vektorů.

Doplňme je do báze

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_1^{k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-1} \\ &\mathbf{e}_1^{k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-2}, \mathbf{e}_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-2}}^{k-2} \end{aligned} \tag{1}$$

prostoru P_{k-2}.

Navíc jsou obrazy přidaných bázových prvků v P_{k-1}, nutně tedy musejí být lineárními kombinacemi bázových prvků $\mathbf{e}_1^{k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-1}$. Platí tedy

$$\varphi(\mathbf{e}_j^{k-2}) = \sum_{i=1}^{p_{k-1}} \alpha_i^j \mathbf{e}_i^{k-1}, \quad p_{k-1} + 1 \leq j \leq p_{k-2}.$$

Můžeme proto zaměnit zvolené vektory $\mathbf{e}_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-2}}^{k-2}$ vektory $\mathbf{e}_j^{k-2} - \sum_{i=1}^{p_{k-1}} \alpha_i^j \mathbf{e}_i^{k-2}, p_{k-1} + 1 \leq j \leq p_{k-2}$. Tím docílíme, že doplněné vektory do báze P_{k-2} patří do jádra zobrazení φ. Předpokládejme to přímo o zvolené bázi (1).

Předpokládejme dále, že již máme sestrojenu bázi podprostoru $P_{k-\ell}$ takovou, že ji můžeme poskládat do schématu

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{e}_1^{k-1}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-1} \\
\mathbf{e}_1^{k-2}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-2}, \mathbf{e}_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-2}}^{k-2} \\
\mathbf{e}_1^{k-3}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-3}, \mathbf{e}_{p_{k-1}+1}^{k-3}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-2}}^{k-3}, \mathbf{e}_{p_{k-2}+1}^{k-3}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-3}}^{k-3} \\
\vdots \\
\mathbf{e}_1^{k-\ell}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-1}}^{k-\ell}, \mathbf{e}_{p_{k-1}+1}^{k-\ell}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-2}}^{k-\ell}, , \mathbf{e}_{p_{k-2}+1}^{k-\ell}, \dots, \mathbf{e}_{p_{k-3}}^{k-\ell}, \dots \mathbf{e}_{p_{k-\ell}}^{k-\ell}
\end{array}
\tag{2}
$$

kde hodnota zobrazení φ na libovolném bázovém vektoru se nachází nad ním, nebo je nulová, pokud nad zvoleným vektorem báze již nic není.

Pokud je $P_{k-\ell} \neq V$, opět musí existovat lineárně nezávislé vektory $\mathbf{e}_1^{k-\ell-1}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-\ell}}^{k-\ell-1}$, které se zobrazují na $\mathbf{e}_1^{k-\ell}, \ldots \mathbf{e}_{p_{k-\ell}}^{k-\ell}$ a můžeme je doplnit do báze, řekněme vektory $\mathbf{e}_{p_{k-\ell}+1}^{k-\ell-1}, \ldots, \mathbf{e}_{p_{k-\ell-1}}^{k-\ell-1}$. Analogicky jako výše ověříme, že doplněné vektory do báze $P_{k-\ell-1}$ budou ležet v jádru φ.

Po k krocích získáme bázi celého V, která má vlastnosti uvedené pro bázi (2) prostoru $P_{k-\ell}$. Jednotlivé sloupce výsledného schématu pak generují hledané podprostory V_i a navíc jsme přímo našli báze těchto podprostorů ukazující, že příslušná zúžení φ jsou cyklická zobrazení. ∎

Připomeňme následujícíc dvě věty z předchozí kapitoly a proveďme jejich důkaz.

Věta 9. (o Jordanově kanonickém tvaru) *Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární operátor na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad K. Má-li φ nad K spektrum algebraické váhy n, pak existuje báze β prostoru V, vzhledem na kterou má φ matici $(\varphi)_\beta$ v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom Jordanův kanonický tvar matice zobrazení φ je určený jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Věta 10. (o Jordanově kanonickém tvaru) *Nechť matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ má nad K spektrum algebraické váhy n. Potom $\mathbf{A}$ je podobná s maticí $\mathbf{J} \in K^{n\times n}$ v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom matice $\mathbf{J}$ je určená jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Důsledek 11. *Nechť matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ mají nad K spektrum plné algebraické váhy n. Potom $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají týž Jordanův kanonický tvar.*

Předpoklad o plné algebraické váze spektra je automaticky splněn nad algebraicky uzavřenými tělesy (např. $\mathbb{C}$). Pokud tento předpoklad není splněn v případě $K = \mathbb{R}$, lze to opět napravit *komplexifikací.*

Důkaz. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou všechny různé vlastní hodnoty zobrazení φ. Z předpokladů věty 9 (věty 10) a z věty 6 plyne, že V je součet kořenových podprostorů:

$$V = \mathcal{R}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_k}.$$

Zobrazení $\varphi_i = (\varphi|_{\mathcal{R}_{\lambda_i}} - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{R}_{\lambda_i}})$ jsou nilpotentní a proto je podle věty 8 každý z kořenových prostorů přímým součtem

$$\mathcal{R}_{\lambda_i} = P_{1,\lambda_i} \oplus \cdots \oplus P_{j_i,\lambda_i}$$

prostorů, na nichž je zúžení zobrazení $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ cyklické. Matice těchto zúžených zobrazení na P_{j_i} jsou Jordanovy bloky příslušné k nulové vlastní hodnotě, zúžené zobrazení $\varphi|_{P_{j_i}}$ má proto za matici Jordanův blok s vlastní hodnotou λ_i.

Z důkazu první věty zbývá dokázat tvrzení o jednoznačnosti. Protože diagonální hodnoty λ_i jsou dány jako kořeny charakteristického polynomu, je jejich jednoznačnost zřejmá.

V yjádříme rozměry jednotlivých Jordanových bloků prostřednictvím hodností $r_k(\lambda_i)$ zobrazení $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^k$ (což jsou čísla závislá pouze na φ).

Tím bude jasné, že až na pořadí jsou bloky jednoznačně určeny. Naopak, přehození bloků odpovídá přečíslování vektorů báze, lze je tedy získat v libovolném pořadí.

Je-li ψ cyklický operátor na n-rozměrném prostoru, pak defekt iterovaného zobrazení ψ^k (dimenze podprostoru $\operatorname{Ker}\psi^k$) je k pro $0 \leq k \leq n$ a je n pro všechna $k \geq n$. Totiž

$$\mathbf{J}_n^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že pokud matice J zobrazení φ obsahuje $d_k(\lambda)$ Jordanových bloků řádu k s vlastní hodnotou λ, pak defekt matice $(J-\lambda\cdot E)^\ell$ je

$$d_1(\lambda)+2d_2(\lambda)+\dots \ell d_\ell(\lambda)+\ell d_{\ell+1}(\lambda)+\dots$$

Odtud spočítáme

$$n-r_\ell(\lambda)=d_1(\lambda)+2d_2(\lambda)+\dots+\ell d_\ell(\lambda)+\ell d_{\ell+1}(\lambda)+\dots$$

Speciálně

$$\begin{aligned}
n-r_{k-1}(\lambda)&=d_1(\lambda)+2d_2(\lambda)+\dots+(k-1)d_{k-1}(\lambda)+(k-1)d_k(\lambda)+(k-1)d_{k+1}(\lambda)+\dots\\
n-r_k(\lambda)&=d_1(\lambda)+2d_2(\lambda)+\dots+(k-1)d_{k-1}(\lambda)+kd_k(\lambda)+kd_{k+1}(\lambda)+\dots\\
n-r_{k+1}(\lambda)&=d_1(\lambda)+2d_2(\lambda)+\dots+kd_k(\lambda)+(k+1)d_{k+1}(\lambda)+(k+1)d_{k+2}(\lambda)+\dots
\end{aligned}$$

Sečtením prvního a třetího řádku a odečtením dvojnásobku druhého řádku obdržíme

$$d_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda).$$

Věta 10 plyne okamžitě z předchozí věty 9, jestliže místo matice A budeme uvažovat jí určené zobrazení $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Naopak, z platnosti této věty o maticích plyne ihned předchozí tvrzení o zobrazeních. $\blacksquare$