20. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

20.1. Jordanův kanonický tvar matice

Říkáme, že matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je v *Jordanově kanonickém tvaru*, zkráceně JKT, má-li blokově diagonální tvar

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}\big(\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),$$

kde $\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i)$ jsou Jordanovy buňky rozměrů $n_i \times n_i$, příslušející skalárům $\lambda_i \in K$. Zřejmě v takovém případě je $n_1 + \ldots + n_k = n$ a $\mathbf{A}$ má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \ldots (\lambda_k - x)^{n_k}.$$

Vidíme, že skalár $\lambda \in K$ je vlastní hodnotou matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když se nachází v seznamu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Protože $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé, *algebraická* násobnost λ vzhledem k $\mathbf{A}$ je *součet velikostí bloků* s hodnotou λ na diagonále, t.j. $\sum_{\lambda_i=\lambda} n_i$.

Podle příkladu 3 z kapitoly 17 bloku $\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i)$, bez ohledu na velikost n_i, odpovídá pouze jednorozměrný vlastní podprostor — proto je *geometrická násobnost* λ vzhledem k $\mathbf{A}$ rovna *počtu takových bloků*, t.j. počtu prvků množiny $\{i \leq k;\ \lambda_i = \lambda\}$.

Jordanovým kanonickým tvarem matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ nazýváme libovolnou matici $\mathbf{J} \in L^{n\times n}$ v JKT, kde pole L je nějaké rozšíření pole K, podobnou (nad polem L) s maticí $\mathbf{A}$.

Upravit matici $\mathbf{A}$ *na Jordanův kanonický tvar* znamená najít k ní podobnou matici $\mathbf{J} \in L^{n\times n}$ v Jordanově kanonickém tvaru a regulární matici $\mathbf{P} \in L^{n\times n}$ takovou, že $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Pak má lineární operátor $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na vektorovém prostoru L^n v bázi tvořené sloupci matice $\mathbf{P}$ matici $\mathbf{J}$ v JKT.

Klíčové výsledky této kapitoly lze shrnout do následujících dvou vět.

Věta 1. *Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární operátor na vektorovém prostoru V konečné dimenze n nad K. Má-li φ nad K spektrum algebraické váhy n, pak existuje báze β prostoru V, vzhledem na kterou má φ matici $(\varphi)_\beta$ v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom Jordanův kanonický tvar matice zobrazení φ je určený jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Věta 2. *Nechť matice* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ *má nad* K *spektrum algebraické váhy* n*. Potom* $\mathbf{A}$ *je podobná s maticí* $\mathbf{J} \in K^{n\times n}$ *v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom matice* $\mathbf{J}$ *je určená jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

Důsledek 3. *Nechť matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ *mají nad* K *spektrum plné algebraické váhy* n*. Potom* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ *právě tehdy, když* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *mají týž Jordanův kanonický tvar.*

Předpoklad o plné algebraické váze spektra je automaticky splněn nad algebraicky uzavřenými tělesy (např. $\mathbb{C}$). Pokud tento předpoklad není splněn v případě $K = \mathbb{R}$, lze to opět napravit *komplexifikací.*

Obě uvedené věty jsou zřejmě ekvivalentní, proto stačí dokázat jen jednu z nich. Důkaz je ale poměrně náročný, v této chvíli se do něj nebudeme pouštět. Ukážeme místo toho několik příkladů, které ilustrují *metodu* úpravy matice na JKT.

Celá metoda je založená na pozorovaní toho, co provede matice (resp. jí příslušný operátor) $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda \mathbf{E}_n$ s kanonickou bází $\varepsilon^{(n)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v K^n. Odpověď na tuto otázku lze stručně a přehledně vyjádřit schématem

$$\mathbf{J}_n : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{e}_{n-1} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0},$$

t. j. $\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ (neboli $\mathbf{e}_1$ je vlastní vektor matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$), a $\mathbf{J}_n \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$ pro $1 < i \leq n$.

Má-li mít lineární operátor $\varphi : V \to V$ v některé bázi β matici v JKT

$$(\varphi)_\beta = \mathbf{J} = \operatorname{diag}\big(\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \ldots, \mathbf{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),$$

musí se tato báze dát rozložit na k řetězců

$$\begin{gathered}
\beta^{(1)} = \big(\mathbf{v}_1^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{n_1}^{(1)}\big), \\
\beta^{(2)} = \big(\mathbf{v}_1^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}_{n_2}^{(2)}\big), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta^{(k)} = \big(\mathbf{v}_1^{(k)}, \ldots, \mathbf{v}_{n_k}^{(k)}\big),
\end{gathered}$$

odpovídajících jednotlivým Jordanovým buňkám $\mathbf{J}_1(\lambda_1)$, $\mathbf{J}_{n_2}(\lambda_2)$, $\ldots$, $\mathbf{J}_{n_k}(\lambda_k)$.

Na každém řetězci $\beta^{(i)}$ působí lineární operátor $\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V = \varphi - \lambda_i$ stejně jako matice $\mathbf{J}_{n_i}$ na kanonické bázi $\varepsilon^{(n_i)} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n_i})$, t. j. podle schématu

$$\varphi - \lambda_i : \mathbf{v}_{n_i}^{(i)} \mapsto \mathbf{v}_{n_i-1}^{(i)} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{v}_2^{(i)} \mapsto \mathbf{v}_1^{(i)} \mapsto \mathbf{0}.$$

Potom první vektor $\mathbf{v}_1^{(i)}$ každého řetězce $\beta^{(i)}$ (v našem schématu první nenulový vektor zprava) je vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_i. Celý řetězec je pak tvořen postupnými obrazy posledního vektoru $\mathbf{v}_{n_i}^{(i)}$ (v našem schématu prvního vektoru zleva) v zobrazení $\varphi - \lambda_i$, t. j.

$$\beta^{(i)} = \Big(\mathbf{v}_{n_i}^{(i)}, (\varphi - \lambda_i)\big(\mathbf{v}_{n_i}^{(i)}\big), \ldots, (\varphi - \lambda_i)^{n_i - 1}\big(\mathbf{v}_{n_i}^{(i)}\big)\Big).$$

Bázi složenou z takových řetězců nazýváme *Jordanovou bází* příslušného lineárního operátoru nebo matice.

Úprava matice (lineárního operátoru) na JKT spočívá tedy hlavně v nalezení Jordanovy báze, t. j. báze složené z řetězců vektorů příslušných jednotlivým vlastním číslům a vlastním vektorům této matice. Nutným předpokladem je ale znalost spektra, jeho určení musí konstrukci báze předcházet.

Dále je třeba poznamenat, že přímočará metoda budování bázových řetězců od vlastních vektorů „zprava doleva“ dobře funguje pouze pro matice malých rozměrů.

Samostatnou poznámku vyžaduje otázka určení spektra analyzované matice. Protože neexistují vzorce, které by pro libovolný polynom dokázali vyjádřit jeho kořeny jako funkce jeho koeficientů sestavené pomocí operací $+, -, *, /$, umocňování a odmocňování (takové vzorce zaručeně existují pouze pro polynomy stupně 4), je nutné často počítat kořeny numericky, tedy pouze přibližně.

Na druhou stranu, „skoro všechny“ čtvercové matice jsou podobné s diagonálními, je tedy pouze „málo“ matic s nediagonálním JKT.

Bohužel (nebo naštěstí), právě toto je často případ důležitých operátorů, proto má smysl se takovými maticemi zabývat.

Příklad 4. Lineární operátor derivace $D : \mathbb{R}^{(n)}[x] \to \mathbb{R}^{(n)}[x]$, kde $D(f) = f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pre $f \in \mathbb{R}^{(n)}[x]$, má na prostoru všech reálných polynomů stupně $\leq n$ v bázi $\xi^{(n)} = (1, x, x^2 \ldots, x^n)$ matici

$$(D)_{\xi^{(n)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z toho už je možné lehce nahlédnout, že maticí operátoru D v bázi $\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right)$ je Jordanova buňka $\mathbf{J}_{n+1} = \mathbf{J}_{n+1}(0)$.

20.2. Příklady úprav matic na JKT

Příklad 5. Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Její charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$$

má dva kořeny $x_{1,2} = 1$ a $x_{3,4} = -1$, oba dvojnásobné. Najdeme k nim příslušné vlastní vektory.

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0&0&2&-2\\1&2&1&-1\\1&0&-1&-1\\3&4&3&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{v}_1=(2,-1,1,1)^T$. Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo má tedy geometrickou násobnost 1. Další vektor řetězce najdeme jako nějaké řešení $\mathbf{x}=\mathbf{v}_2$ soustavy $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\cdot\mathbf{x}=\mathbf{v}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 1, 0)^T$.

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} + \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla -1); jeho bázi tvoří vlastní vektory

$\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$.

$\mathbf{A}$ je tedy podobná matici v JKT

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\bigl(\mathbf{J}_2(1), -1, -1\bigr) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a příslušná Jordanova báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ je tvořená sloupci matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na předchozím příkladě bylo vidět, že je poměrně snadné se vypořádat s řetězci vektorů, příslušnými různým vlastním číslům. Nyní se soustředíme na hledání řetězců příslušných jedinému vlastnímu číslu — budeme se zabývat maticemi s jednoprvkovým spektrem.

Příklad 6. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 0$.

Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{E} = \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^T$, geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1. Hledaná báze je tedy tvořena jediným řetězcem příslušným vlastnímu vektoru $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$. Vektor $\mathbf{u}_2$ najdeme jako nějaké řešení $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_1$ úpravou její rozšířené matice

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{u}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

takže můžeme položit např. $\mathbf{u}_2 = (-1, -1, 0)^T$.

Podobně, třetí vektor $\mathbf{u}_3$ našeho řetězce najdeme jako nějaké řešení $\mathbf{x} = \mathbf{u}_3$ soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_2$ úpravou její rozšířené matice

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{u}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy např. $\mathbf{u}_3 = (0, -1, 0)^T$.

To znamená, že $\mathbf{A}$ je podobná přímo s Jordanovou buňkou

$$\mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostřednictvím matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3-x)^3$$

a algebraicky trojnásobné vlastní číslo $x_{1,2,3} = 3$. K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory $\mathbf{u} = (2, -1, 0)^T$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T$.

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu příslušejí dva řetězce délek 1 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ existuje vektor $\mathbf{v}_2$ tak, že $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}_2$, musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (2a + b, -a, b)^T$, kde parametry $a, b \in \mathbb{R}$ budeme volit tak, aby soustava $(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$ měla nějaké řešení $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$. Úpravou její rozšířené matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & 2a+b \\ -2 & -4 & 2 & -a \\ 1 & 2 & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má řešení právě tehdy, když $a = 2b$; volíme např. $b = 1$, $a = 2$. Tomu odpovídá $\mathbf{v}_1 = (5, -2, 1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)^T$.

Za $\mathbf{v}_3$ lze zvolit libovolný vektor, který spolu s $\mathbf{v}_1$ tvoří bázi vlastního podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$; vidíme, že vyhovují obě volby $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$. Vyberme si např. druhou možnost $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)^T$.

JKT matice $\mathbf{A}$ je tedy

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\big(\mathbf{J}_2(3), 3\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a příslušná matice přechodu tvořená sloupci Jordanovy báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ je např.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.3. Případ vícenásobného komplexního vlastního čísla

Z hlediska aplikací je důležité umět nahradit komplexní JKT reálné matice vhodným *reálným* kanonickým tvarem, podobným s původní maticí prostřednictvím *reálné* matice přechodu.

Je-li $\lambda = a + ib$ komplexní vlastní číslo matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, je i $\overline{\lambda} = a - ib$ její vlastní číslo, pričemž λ a $\overline{\lambda}$ mají stejnou algebraickou i geometrickou násobnost. Pokud navíc $\gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ je část Jordanovy báze příslušná k λ, složená z řetězců délek $m_1 + \ldots + m_l = m$, tak $\overline{\gamma} = (\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_m)$ je část Jordanovy báze příslušná k $\overline{\lambda}$, složená v odpovídajícím pořadí z komplexně sdružených řetězců týchž délek.

Buď

$$\mathbf{J}_n \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

zobecněná Jordanova buňka

Právě zobecněná Jordanova buňka $\mathbf{J}_m \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ je ta reálná matice, kterou lze v komplexním JKT reálné matice $\mathbf{A}$ nahradit dvojici Jordanových bloků $\mathbf{J}_m(\lambda)$, $\mathbf{J}_m(\overline{\lambda})$ příslušných komplexně sdruženým vlastním číslům $\lambda = a + \mathrm{i}b$, $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$ s nenulovým b.

Přesněji, je-li $\gamma = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ řetězec (komplexních) vektorů odpovídající v příslušné Jordanově bázi bloku $\mathbf{J}_m(\lambda)$, pak reálné vektory

$$\mathbf{u}_1 = \mathrm{Im}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1 + \overline{\mathbf{w}}_1), \ldots \mathbf{u}_m = \mathrm{Im}\mathbf{w}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_m + \overline{\mathbf{w}}_m)$$

a

$$\mathbf{v}_1 = -\mathrm{Re}\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{w}_1), \ldots \mathbf{v}_m = -\mathrm{Re}\mathbf{w}_m = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{\mathbf{w}}_m - \mathbf{w}_m)$$

tvoří úsek báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m)$ odpovídající bloku

$$\mathbf{J}_m \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Necháme-li tedy v komplexním JKT $\mathbf{J}$ čtvercové reálné matice $\mathbf{A}$ reálné Jordanovy bloky a jim odpovídající řetězce Jordanovy báze beze změny, a každou dvojici Jordanových bloků $\mathbf{J}_m(\lambda)$, $\mathbf{J}_m(\overline{\lambda})$ příslušných komplexně sdruženým imaginárním vlastním hodnotám λ, $\overline{\lambda}$ nahradíme blokem $\mathbf{J}_m\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\lambda & -\mathrm{Re}\lambda \\ \mathrm{Re}\lambda & \mathrm{Im}\lambda \end{pmatrix}$ a jim odpovídající řetězce $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$, $(\overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_m)$ Jordanovy báze nahradíme úsekem $(\mathrm{Im}\mathbf{w}_1, -\mathrm{Re}\mathbf{w}_1, \ldots, \mathrm{Im}\mathbf{w}_m, -\mathrm{Re}\mathbf{w}_m)$, získáme tak zobecněnou Jordanovu matici $\mathbf{J}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a *reálnou* matici přechodu $\mathbf{Q}$ (jejímiž sloupci jsou vektory nové báze) takovou, že $\mathbf{J}' = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$.