19. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

V celé této kapitole bude V buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

<u>Motivace</u>: Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory

v_1 a v_2.

$$(1-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})x_1-x_2 = 0, (1-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})y_1-y_2 = 0$$

$$v_1 = (1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^T, v_2 = (1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^T$$

Tyto vektory jsou na sebe navzájem kolmé.

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.

Toto není náhoda.

19.1. Adjungované zobrazení a samoadjungovaný operátor

Definice 1. Homomorfismus $\varphi : U \to V$ unitárních (euklidovských) prostorů se nazývá *adjungované zobrazení*, jestliže existuje zobrazení $\varphi^* : V \to U$ pro všechny vektory $u \in U$ a $v \in V$ platí

$$\langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U.$$

Věta 2. Nechť α je ortonormální báze v U, β je ortonormální báze v V, $\varphi : U \to V$ homomorfismus unitárních (euklidovských) prostorů, $A = [\varphi]_{\alpha,\beta}$. Potom matice adjungovaného zobrazení $\varphi^* : V \to U$ má tvar

$$[\varphi^*]_{\beta,\alpha} = \begin{cases} \overline{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Obráceně, je-li $\psi : V \to U$ lineární zobrazení a $[\psi]_{\beta,\alpha} = \overline{A}^T$, pak $\psi = \varphi^*$.

Definice 3. Operátor $\varphi : U \to U$ unitárního (euklidovského) prostoru se nazývá *samoadjungované zobrazení*, jestliže pro všechny vektory $u, v \in U$ platí

$$\langle \varphi(u), v \rangle_U = \langle u, \varphi(v) \rangle_U$$

tj. pokud $\varphi^* = \varphi$.

Věta 4. Operátor $\varphi : U \to U$ unitárního (euklidovského) prostoru je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici v ortonormální bázi α platí

$$[\varphi]_{\alpha,\alpha} = A = \begin{cases} \overline{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Lemma 5. Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ unitárního (euklidovského) prostoru U je samoadjungovaný s invariantním podprostorem V. Pak $V^{\perp}$ je rovněž invariantní.

Věta 6. Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru U. Pak platí:

1. Vlastní čísla zobrazení φ jsou reálná.

2. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

Věta 7. O spektrálním rozkladu. Pro každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U existuje ortonormální báze α prostoru U tvořená vlastními vektory, v níž má φ diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.

Důsledek 8. Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru U vlastními navzájem kolmými vektory $u_1, \dots, u_n$ a vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nechť $P_k : U \to U$ je kolmá projekce na $[u_k]$. Potom

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

Důsledek 9. Pro každou reálnou symetrickou matici A existuje ortogonální matice P tak, že matice

$$P^T AP = P^{-1}AP$$

je diagonální.

Důsledek 10. **Pro kvadratické formy.** Každá kvadratická forma na euklidovském prostoru U dimenze n má ve vhodné bázi analytický tvar

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

19.2 Metrická klasifikace kuželoseček

Nechť A je bod v $\mathbb{R}^2$, v_1, v_2 dva lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^2$. Potom každý bod X v $\mathbb{R}^2$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$X = A + x_1 v_1 + x_2 v_2.$$

Trojici (A, v_1, v_2) nazýváme afinní báze, dvojici (x_1, x_2) souřadnice bodu X v této bázi.

Nechť (B, u_1, u_2) je jiná afinní báze bodu X se souřadnicemi (y_1, y_2). Přitom

$$\begin{array}{rcl} A & = & B + c_1 u_1 + c_2 u_2 \\ v_1 & = & a_{11} u_1 + a_{21} u_2 \\ v_2 & = & a_{12} u_1 + a_{22} u_2. \end{array}$$

Potom

$$
\begin{aligned}
X=&A+x_1v_1+x_2v_2\\
=&B+c_1u_1+c_2u_2+x_1a_{11}u_1+x_1a_{21}u_2+x_2a_{12}u_1+x_2a_{22}u_2\\
=&B+(x_1a_{11}+x_2a_{12}+c_1)u_1+(x_1a_{21}+x_2a_{22}+c_2)u_2.
\end{aligned}
$$

Tedy porovnáním souřadnic obdržíme vztah pro záměnu afinních souřadnic

$$
(*) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.
$$

Afinní báze (A, v_1, v_2) se nazývá *ortonormální*, je-li (v_1, v_2) ortonormální baze vektorového prostoru. Jsou-li (A, v_1, v_2) a (B, u_1, u_2) ortonormální báze, pak matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ z transformačního vztahu (*) je ortogonální.

Věta 11. Metrická klasifikace kuželoseček. Nechť ve standardní afinní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ je kuželosečka zadána rovnicí

$$k(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0.$$

Potom existuje ortonormální afinní báze (B, u_1, u_2), v níž je tato kuželosečka dána jednou z rovnic

signatura $(2, 0, 0)$

elipsa: $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0,$

prázdná množina: $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 + 1 = 0,$

bod: $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 = 0.$

signatura $(1, 1, 0)$

hyperbola: $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0,$

dvě různoběžné přímky: $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 = 0.$

signatura $(1, 0, 0)$

parabola: $(\frac{y_1}{a})^2 - 2py_2 = 0,$

dvě rovnoběžné přímky: $(\frac{y_1}{a})^2 - 1 = 0,$

jedna přímka: $(\frac{y_1}{a})^2 = 0,$

prázdná množina: $(\frac{y_1}{a})^2 + 1 = 0.$