18. ORTOGONÁLNÍ A UNITÁRNÍ ZOBRAZENÍ A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

V celé této kapitole bude V buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

18.1. Ortogonální a unitární zobrazení

Definice 1. Homomorfismus $\varphi : V \to W$ unitárních prostorů se nazývá *unitární zobrazení*, jestliže pro všechny vektory $u, v \in V$ platí

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle.$$

Unitární izomorfismus je bijektivní unitární zobrazení. V případě euklidovských prostorů se častěji používá název *ortogonální zobrazení*, *ortogonální izomorfismus*.

Věta 2. Každý konečně rozměrný unitární prostor dimenze n je unitárně izomorfní s $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem. Každé unitární zobrazení $\varphi : V \to W$ mezi unitárními prostory je prosté.

Věta 3. Nechť $\varphi : V \to W$ je lineární zobrazení unitárních prostorů. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. φ je unitární.

2. $\|u\| = \|\varphi(u)\|$ pro všechny $v \in V$.

3. pro každou ortonormální bázi $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ na V je i $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ ortonormální báze na W.

Z předchozí věty plyne, že každý unitární endomorfismus $V \to V$ je bijekce, hovoříme také o *unitární transformaci*.

Věta 4. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení (endomorfismus) unitárního prostoru V. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. φ je unitární transformace

2. φ je lineární izomorfismus a pro každé $u, v \in V$ platí $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

3. matice A zobrazení φ v libovolné ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$ (pro euklidovské prostory to znamená $A^{-1} = A^T$)

4. matice A zobrazení φ v některé ortonormální bázi splňuje $A^{-1} = \bar{A}^T$

5. řádky matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem

6. sloupce matice A zobrazení φ v ortonormální bázi tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{K}^n$ se standardním skalárním součinem.

18.2. Vlastní čísla a vektory ortogonálních a unitárních zobrazení (matic)

Definice 5. Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s vlastností $A^{-1} = \bar{A}^T$ z předchozí věty se nazývají *unitární matice* pro komplexní skaláry, v případě $\mathbb{R}$ hovoříme o *ortogonálních maticích*.

Součin unitárních (resp. ortogonálních) matic je unitární (resp. ortogonální), stejně pro inverze.

Determinant unitární matice má vždy velikost rovnu jedné, v případě reálných skalárů pak determinant musí být ± 1 ($1 = \det(E) = \det(A\bar{A}^T) = \det(A)\overline{\det A} = |\det A|$).

Dále, je-li $Ax = \lambda x$ pro unitární či ortogonální matici, pak $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = |\lambda|^2(\langle x, x\rangle)$. Proto jsou vlastní hodnoty ortogonálních matic rovny ± 1, vlastní hodnoty unitárních matic jsou vždy komplexní jednotky.

Lemma 6. Nechť je $\varphi : V \to V$ unitární zobrazení a $U \subseteq V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ. Pak také jeho ortogonální doplněk $U^{\perp}$ je invariantní podprostor.

Věta 7. Nechť $\varphi : V \to V$ je unitární zobrazení. Je-li V unitární prostor, pak je ortogonálním součtem jednorozměrných vlastních podprostorů. Je-li V euklidovský prostor, pak je ortogonálním součtem jednorozměrných a dvourozměrných invariantních podprostorů takových, že jednorozměrné jsou generovány vlastními vektory a příslušné vlastní hodnoty jsou ± 1, zatímco zúžení φ na dvourozměrné je dáno rotacemi kolem počátku o vhodné úhly.

Důkaz. Tvrzení pro komplexní unitární prostory je přímým důsledkem předchozího lemmatu: Jistě existuje alespoň jeden vlastní vektor $v \in V$. Pak je zúžení φ na invariantní podprostor $\langle v \rangle^{\perp}$ opět unitární a jistě má opět nějaký vlastní vektor. Po n takovýchto krocích obdržíme hledanou bázi z vlastních vektorů.

Nechť je V euklidovský prostor. Potom se na jeho komplexifikaci $V^{\mathbb{C}}$ rozšíří skalární součin z V tak, že prohlásíme bázi indukovanou na $V^{\mathbb{C}}$ libovolně zvolenou ortonormální bazí na V za ortonormální.

Vzhledem k tomuto skalárnímu součinu je ale komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}}$ také unitární (je dána stejnou reálnou maticí) a podle předchozí části důkazu se $V^{\mathbb{C}}$ rozpadá na ortogonální součet vlastních podprostorů.

Nyní stačí aplikovat výsledky z části 17.5. Získáme tak dvourozměrné invariantní podprostory $P_\lambda \subseteq V$. Přitom je každý takový podprostor P_λ reálným podprostorem v součtu $Q_\lambda \oplus Q_{\bar{\lambda}}$ odpovídajících komplexních vlastních podprostorů.

Protože v $V^{\mathbb{C}}$ se jedná o ortogonální součet a zúžení skalárního součinu v $V^{\mathbb{C}}$ na reálné podprostory P_λ splývá s původním skalárním součinem na V, musí být získaný součet ortogonální. Protože vlastní hodnoty $\varphi^{\mathbb{C}}$ musí mít velikost 1, jsou zúžení na získané dvourozměrné invariantní podprostory opravdu rotace.

Poznámka 8. Pro euklidovské prostory dimenze n stačí uvažovat rotace v dvourozměrných podprostorech a tzv. reflexe vzhledem k nadrovinám určeným $n-1$ nezávislými vektory. Skutečně, kterékoliv dva nezávislé vlastní vektory s vlastní hodnotou -1 odpovídají rotaci o π v příslušné rovině. Při liché násobnosti vlastní hodnoty -1 nám tedy zůstane právě jeden jednorozměrný vlastní podprostor a ve vhodné ortonormální bázi obdržíme dané ortogonální zobrazení jako složení uvedených typů zobrazení.

Např. každé ortogonální zobrazení v dimenzi tři lze ve vhodné bázi zapsat buď jako rotaci v rovině prvních dvou bázových vektorů nebo jako předchozí zobrazení složené s reflexí podle této roviny. Tuto bázi přitom dostaneme přímým výpočtem vlastních hodnot a vlastních vektorů nad komplexními skaláry.

Důsledek 9. Nechť $\varphi : V \to V$ je unitární zobrazení. Je-li V unitární prostor, existuje ve V ortonormální báze α tvořená vlastními vektory tak, že

$$[\phi]_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důsledek 10. Nechť $\varphi : V \to V$ je ortogonální zobrazení. Je-li V euklidovský prostor, pak existuje ve V ortonormální báze α tak, že matice φ v této bázi má tvar

$$\begin{pmatrix} R_{\alpha_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\alpha_2} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & R_{\alpha_k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n-2k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-2k} \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_i \in \{1, -1\}$.

Věta 11. (**Schurova o ortogonální triangulovatelnosti**) Nechť $\varphi : V \to V$ je libovolné lineární zobrazení (reálného nebo komplexního) unitárního prostoru s $m = \dim V$ vlastními hodnotami (včetně násobnosti). Pak existuje ortonormální báze prostoru V taková, že φ v ní má horní trojúhelníkovou matici s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ na diagonále.

18.3. Geometrická interpretace ortogonálních operátorů

Ortogonální operátor φ, jehož determinant se rovná $+1$, se nazývá *vlastní ortogonální operátor*. Je-li determinant matice operátoru φ roven -1, nazývá se *nevlastní ortogonální operátor*.

Probereme teď ortogonální operátory v malých dimenzích. Nejsnazší to je v případě jednodimenzionálního prostoru. Zvolíme v něm nějaký vektor $\mathbf{e}$ délky 1.

Potom $\varphi(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}$ a z podmínky ortogonality φ plyne

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \varphi(\mathbf{e}), \varphi(\mathbf{e}) \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e}, \boldsymbol{\lambda}\mathbf{e} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \lambda^{\mathbf{2}}. \end{aligned}$$

Platí tedy $\boldsymbol{\lambda} = \pm 1$.

Na jednodimenzionálním euklidovském prostoru tedy existují pouze dva ortogonální operátory. Je to buď identický operátor $\varphi(x) = x$ (vlastní ortogonální operátor) anebo operátor $\varphi(x) = -x$ (nevlastní).

Buď nyní φ ortogonální operátor na dvoudimenzionálním euklidovském prostoru V. Zvolme v něm ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a nechť

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je matice operátoru φ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Budeme dále předpokládat, že operátor φ je vlastní ortogonální operátor, tj. platí $ad-bc=1$.

Matice operátoru φ musí být navíc ortogonální, tj. musí platit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $ad - bc = 1$ plyne jiné vyjádření inverzní matice k matici operátoru φ:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Protože je inverzní matice k libovolné regulární matici určena jednoznačně, dostáváme rovnosti $a = d, c = -b$.

Matice operátoru φ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

kde $a^2 + b^2 = 1$. Položíme-li $a = \cos\alpha$ a $b = \sin\alpha$, dostaneme, že každý vlastní ortogonální operátor φ na dvoudimenzionálním euklidovském prostoru V má vzhledem k libovolné ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ matici

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

kde α je vhodný úhel. Operátor φ tedy není nic jiného než pootočení o úhel.

Nyní budeme uvažovat případ nevlastního ortogonálního operátoru φ, tj. případ $ad - bc = -1$. Charakteristický polynom

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc = (ad-bc)-(a+d)\lambda+\lambda^2$$

operátoru φ má potom právě dva různé reálné kořeny. Existuje tedy vlastní vektor $\mathbf{e}$ operátoru φ, tj. platí $\varphi(\mathbf{e}) = \lambda\mathbf{e}$, kde $\lambda = \pm 1$. Vektor $\mathbf{e}$ doplníme do ortonormální báze vektorem $\mathbf{f}$. To je podle předchozího jednodimenzionálního případu a lemmatu 6 také vlastní vektor operátoru φ, tedy $\varphi(\mathbf{f}) = \pm\mathbf{f}$. V bázi $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ má tedy matice operátoru φ matici

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Protože je ale φ nevlastní ortogonální operátor, jsou pro výběr znamének pouze dvě možnosti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nevlastní ortogonální operátor ve dvoudimenzionálním euklidovském prostoru V je tedy osová symetrie vzhledem k ose procházející počátkem.

Nazvěme jednoduchou rotací vlastní ortogonální operátor φ, který v nějakém dvoudimenzionálním invariantním podprostoru U působí jako otočení o úhel α, a v ortogonálním doplňku $U^{\perp}$ zobrazuje každý vektor do sebe. Ve vhodně zvolené bázi má potom φ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednoduchá reflexe je nevlastní ortogonální operátor φ, který v nějakém jednodimenzionálním invariantním podprostoru U zobrazuje každý vektor $\mathbf{x}$ do opačného vektoru $-\mathbf{x}$, a v ortogonálním doplňku $U^{\perp}$ zobrazuje každý vektor do sebe. Ve vhodně zvolené bázi má potom φ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z důsledku 10 pak máme

Důsledek 12. Každý ortogonální operátor φ na euklidovském prostoru V můžeme vyjádřit jako složení několika jednoduchých rotací a několika jednoduchých reflexí.

Má-li operátor φ na dvoudimenzionálním prostoru vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ matici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Považujeme-li otočení o úhel π také za prostou rotaci, dostaneme další důsledek.

Důsledek 13. Každý vlastní ortogonální operátor na euklidovském vektorovém prostoru lze složit z několika jednoduchých rotací. Každý nevlastní ortogonální operátor lze složit z několika jednoduchých rotací a jedné jednoduché reflexe.

Věta 14. Každou rotaci na 2-dimenzionálním euklidovském prostoru lze složit ze dvou jednoduchých reflexí.

Důkaz. Provedeme maticový důkaz. Vezměme si rotaci o úhel α. Ta má vzhledem k ortonormální bázi $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ matici

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Jednoduchá reflexe vzhledem k ose určené vektorem $\mathbf{e}$ má vzhledem k bázi $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vezmeme-li otočení o úhel $\alpha/2$, zobrazí se vektor $\mathbf{e}$ do vektoru $\mathbf{e}'$, který má vzhledem k původní bázi $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ souřadnice $(\cos\alpha/2; \sin\alpha/2)$.

Podobně vektor $\mathbf{f}$ se zobrazí do vektoru $\mathbf{f}'$, který má vzhledem k bázi $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ souřadnice $(-\sin\alpha/2; \cos\alpha/2)$.

Matice P přechodu od báze $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ k bázi $\mathbf{e}'$, $\mathbf{f}'$

má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha/2 & -\sin\alpha/2 \\ \sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice je pak tvaru

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha/2 & \sin\alpha/2 \\ -\sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 \end{pmatrix}.$$

Jednoduchá reflexe vzhledem k ose určená vektorem $\mathbf{e}'$ má vzhledem k nové bázi $\mathbf{e}'$, $\mathbf{f}'$ známou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li M matici této reflexe vzhledem k bázi $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$, platí

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

neboli M je rovno součinu matic

$$\begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\alpha}/2 & -\sin\boldsymbol{\alpha}/2 \\ \sin\boldsymbol{\alpha}/2 & \cos\boldsymbol{\alpha}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\alpha}/2 & \sin\boldsymbol{\alpha}/2 \\ -\sin\boldsymbol{\alpha}/2 & \cos\boldsymbol{\alpha}/2 \end{pmatrix}.$$

Složíme-li nyní jednoduchou reflexi vzhledem k ose určené vektorem $\mathbf{e}$ s jednoduchou reflexí vzhledem k ose určené vektorem $\mathbf{e'}$, bude mít výsledný operátor vzhledem k bázi $\mathbf{e}$; $\mathbf{f}$ matici

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením dostaneme, že složením dostaneme operátor, který má vzhledem k bázi $\mathbf{e}$; $\mathbf{f}$ matici

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha/2 - \sin^2\alpha/2 & -2\cos\alpha/2\sin\alpha/2 \\ 2\cos\alpha/2\sin\alpha/2 & \cos^2\alpha/2 - \sin^2\alpha/2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Složený operátor se tedy rovná rotaci o úhel α. ■

Důsledek 15. Každý ortogonální operátor na euklidovském prostoru lze složit z jednoduchých reflexí.

V euklidovském prostoru dimenze 3 pro každý vlastní ortogonální operátor φ existuje ortonormální báze $\mathbf{e}_1$; $\mathbf{e}_2$; $\mathbf{e}_3$, ve které má φ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pro všechny vektory $\mathbf{x}$ invariantního podprostoru U generovaného vektorem $\mathbf{e}_1$ tak platí $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, všechny prvky U tedy zůstávají na místě. Na ortogonálním doplňku vektoru $\mathbf{e}_1$ (tj. v rovině generované vektory $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) operátor φ působí jako otočení o úhel α.

(Připouštíme i případ $\varphi = 0$, tj. že operátor φ je identický operátor na celém prostoru V.)

Operátor φ je tedy rotace kolem osy určená vektorem $\mathbf{e}_1$.

Každý vlastní ortogonální operátor v třídimenzionálním euklidovském prostoru V je tedy rotace kolem nějaké osy.