17. SPEKTRUM LINEÁRNíHO OPERÁTORU

17.1. Spektrum lineárního operátoru a matice

Polynom $f(x) \in K[x]$ *dělí* polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)\, p(x)$.

Zřejmě, pokud f dělí g, tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g.

Skalár $\lambda \in K$ je kořenem polynomu $f(x)$ (t. j. $f(\lambda) = 0$) právě tehdy, když polynom $x - \lambda$ dělí polynom $f(x)$.

Skalár $\lambda \in K$ je *m-násobný kořen polynomu* $f(x) \in K[x]$, pokud $(x-\lambda)^m$ je nejvyšší mocnina polynomu $x - \lambda$, která ještě dělí $f(x)$.

Namísto o 1-násobném kořenu mluvíme o *jednoduchém kořenu*.

Polynom f stupně n má nanejvýš n kořenů, pokud každý z nich počítáme s jeho násobností.

Pokud $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu f stupně n a $m_1, \ldots, m_k$ jsou jejich násobnosti, tak $m_1 + \ldots + m_k \leq n$.

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá *m-násobná vlastní hodnota* matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, pokud λ je m-násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že *algebraická násobnost vlastní hodnoty* λ matice $\mathbf{A}$ je m.

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Podobne definujeme i pojem m-násobné vlastní hodnoty a algebraické násobnosti vlastní hodnoty pro lineární operátory na konečně rozměrných prostorech.

Matice řádu n má nanejvýš n vlastních hodnot, pokud každý z nich počítáme s její násobností.

Spektrem lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme množinu všech jeho vlastních hodnot a označujeme ji $\mathrm{Spec}\,\varphi$. Stejně definujeme i *spektrum matice* $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, které značíme $\mathrm{Spec}\,\mathbf{A}$.

Algebraickou váhou spektra $\mathrm{Spec}\,\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \mathrm{Spec}\,\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má *jednoduché spektrum*, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Množina všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ nad číselným tělesem K, jehož prvkem je i identický operátor $\mathrm{id}_V : V \to V$.

Proto pro $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ a $\lambda \in K$ i zobrazení $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$, dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{x}$, je lineární operátor na V.

Zřejmě $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ je vlastní vektor operátoru φ příslušející k jeho vlastní hodnotě λ právě tehdy, když $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$.

Lineární podprostor $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \subseteq V$ nazýváme *vlastní podprostor lineárního operátoru* $\varphi : V \to V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Zřejmě pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, tedy $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ je invariantní podprostor operátoru φ.

Geometrickou násobností vlastní hodnoty λ lineárního operátoru φ nazýváme dimenzi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V))$ jeho vlastního podprostoru příslušejícího k λ.

Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se zřejmě rovná číslu

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).$$

Připomínáme, že $\mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ označuje podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, takže platí

$$1 \leq \dim \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = n - h(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \leq n.$$

Geometrickou váhou spektra lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme součet geometrických násobností všech jeho vlastných hodnot.

$\lambda \in K$ je vlastní hodnota právě tehdy, když $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, což je ekvivalentní s nenulovostí jak geometrické tak i algebraické násobnosti λ vzhľadom na φ.

Lemma 1. Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V a $S \subseteq V$ je jeho invariantní podprostor. Označme $\varphi_1 = \varphi \restriction S$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S. Potom charakteristický polynom $\mathrm{ch}_{\varphi_1}(x)$ dělí charakteristický polynom $\mathrm{ch}_{\varphi}(x)$.

Tvrzení 2. Nechť λ je vlastní hodnota lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V. Potom její geometrická násobnost je menší nebo rovná její algebraické násobnosti.

Pokud algebraická násobnost skaláru λ vzhledem k operátoru φ je ≥ 1, t.j. pokud λ je vlastní hodnota, tak i geometrická násobnost λ vzhledem k φ je alespoň 1.

Příklad 3. Označme $\mathbf{J}_n \in K^{n\times n}$ čtvercovou matici řádu n, jejíž prvky na místech $(i, i+1)$ jsou rovné 1 pro $1 \leq i \leq n-1$ a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě $h(\mathbf{J}_n) = n-1$. Dále položme

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = \lambda\mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$. Tedy $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je tvořená diagonálou z n lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z $n-1$ jednotek a zbytek jsou nuly.

Například

$$\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda)\,, \qquad \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \text{atd.}$$

Každá matice tvaru $\mathbf{J}_n(\lambda)$ sa nazývá *Jordanova buňka* řádu n. Zřejmě i $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$ je Jordanova buňka.

Charakteristický polynom Jordanovy buňky $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je

$$\det(\mathbf{J}_n(\lambda) - x\mathbf{I}_n) = \det \mathbf{J}_n(\lambda - x) = (\lambda - x)^n.$$

Tato matice má jedinou vlastní hodnotu $x = \lambda$ s algebraickou násobností n.

Na druhé straně, podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda\mathbf{I}_n = \mathbf{J}_n$ je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Tedy geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je stále jen 1, bez ohledu na to, jak velké je n. Proto $\mathbf{J}_n(\lambda)$ pro $n \geq 2$ není podobná se žádnou diagonální maticí.

Tvrzení 4. Podobné matice mají stejné spektrum, včetně algebraické i geometrické násobnosti každé vlastní hodnoty.

Věta 5. Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V dimenze n. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) φ je diagonalizovatelný;

(ii) geometrická váha spektra $\mathsf{Spec}\varphi$ se rovná n;

(iii) algebraická váha spektra $\mathsf{Spec}\varphi$ se rovná n a algebraická násobnost každé vlastní hodnoty se rovná její geometrické násobnosti;

(iv) algebraická i geometrická váha spektra $\mathsf{Spec}\varphi$ se rovná n.

Překážky bránicí diagonalizaci lineárneho operátoru φ na n-rozměrném vektorovém prostoru V se dělí do dvou kategorií:

(1) algebraická váha spektra $\mathsf{Spec}\varphi$ je menší než $n = \mathsf{dim}V$, t.j. φ má „málo“ vlastních hodnot v číselném tělese K, i když každou z nich počítáme i s její algebraickou násobností;

(2) geometrická váha spektra $\mathsf{Spec}\varphi$ je menší než jeho algebraická váha, t.j. geometrická násobnost některých vlastních hodnot nedosahuje jejich algebraické násobnosti.

Prekážky druhého typu definitivně vylučují diagonalizaci.

17.2. Schurova veta o triangularizaci

Dokážeme, že v maticích s „dostatočně mnoho“ vlastními hodnotami můžeme vynulovat všechny prvky pod diagonálou.

Věta 6. (Schurova věta o triangularizaci) Nechť matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ má spektrum algebraické váhy n. Potom $\mathbf{A}$ je podobná s horní trojúhelníkovou maticí, jejíž diagonálu tvoří všechny vlastní hodnoty matice $\mathbf{A}$, přičemž každá se tu vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost.

Tvrzení 7. Nechť matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ má n vlastních) hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pričemž každá z nich sa v této posloupnosti vyskytuje se svou algebraickou násobností. Potom

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n, \qquad \mathsf{tr}\mathbf{A} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

a v charakteristickém polynomu $\mathsf{ch}_{\mathbf{A}}(x)$ jsou koeficienty u mocnin x^0 a x^{n-1} rovné $\det \mathbf{A}$ resp. $(-1)^{n-1}\mathsf{tr}\mathbf{A}$.

17.3. Komplexifikace

Komplexifikací vektorového prostoru V nad číselným tělesem $\mathbb{R}$ nazveme vektorový prostor $V^{\mathbb{C}}$ nad tělesem $\mathbb{C}$, jehož prvky jsou všechny formální lineární kombinace tvaru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}$, kde $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ je imaginární jednotka. Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ klademe

$$\mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{u} \;\&\; \mathbf{y} = \mathbf{v}.$$

Píšeme též $\mathbf{x} = \mathrm{Re}\,\mathbf{z}$, $\mathbf{y} = \mathrm{Im}\,\mathbf{z}$ a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ nazýváme *reálnou* resp. *imaginární částí vektora* $\mathbf{z} \in V^{\mathbb{C}}$.

Sčítání takovýchto vektorů definujeme „po složkách“, t.j.

$$(\mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}) + (\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathrm{i}(\mathbf{y} + \mathbf{v}).$$

Násobení skalárem $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, definujeme vztahem

$$(a + \mathrm{i}b)(\mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}) = (a\mathbf{x} - b\mathbf{y}) + \mathrm{i}(a\mathbf{y} + b\mathbf{x}).$$

Komplexně sdruženým vektorem k vektoru $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$ nazýváme vektor $\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{x} - \mathrm{i}\mathbf{y}$.

Tvrzení 8. Nechť V je reálný vektorový prostor. Potom

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Komplexifikace vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$ je „opačnou konstrukcí“ k zreálnění vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$.

Komplexifikací lineárního zobrazení $\varphi : V \to U$ mezi reálnými vektorovými prostory V, U nazýváme lineární zobrazení

$$\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$$

dané předpisem

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + \mathrm{i}\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\varphi(\mathbf{y}),$$

pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Speciálně $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x} \in V$.

Tvrzení 9. Nechť U, V jsou reálné vektorové prostory s bázemi α resp. β a $\varphi : V \to U$ je lineární zobrazení. Potom

$$(\varphi)_{\alpha,\beta} = (\varphi^{\mathbb{C}})_{\alpha,\beta}.$$

Tedy φ a jeho komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$ mají stejnou matici vzhledem na báze β, α.

Věta 10. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze n nad číselným tělesem $\mathbb{R}$ a $\varphi : V \to V$ je lineární operátor. Potom lineární operátor $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ má, včetně algebraické násobnosti, n vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

17.4. Geometrický význam komplexních vlastních čísel

Tvrzení 11. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{w}$ je k němu příslušející vlastní vektor. Potom i $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a přísluší mu vlastní vektor $\overline{\mathbf{w}}$. Navíc vlastní čísla λ a $\overline{\lambda}$ mají stejnou algebraickou i geometrickou násobnost.

Věta 12. Nechť φ je lineární transformace reálného vektorového prostoru V, $\lambda = a + \mathrm{i}b = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ je její komplexní vlastní hodnota s nenulovou imaginární částí, ke které v $V^{\mathbb{C}}$ přísluší vlastní vektor $\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}$, kde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Potom $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je bazí invariantního podprostoru $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \subseteq V$ a zúžení φ na $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ má v této bázi reálnou matici $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r\mathbf{R}_\alpha$.

Důsledek 13. Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad tělesem $\mathbb{R}$. Potom φ má alespoň jeden invariantní podprostor dimenze 1 nebo 2. Pokud $\dim V$ je liché číslo, tak φ má aspoň jeden invariantný podprostor dimenze 1.

17.5. Vztah komplexifikace a zreálnění

Lemma 14. Nechť V je reálný vektorové prostory a $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení. Pak

1. $U \subseteq V$ je invariantní vzhledem k φ právě, když $U^{\mathbb{C}} \subseteq V^{\mathbb{C}}$ je invariantní vzhledem k $\varphi^{\mathbb{C}}$.

2. $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ právě, když $V^{\mathbb{C}} = U_1^{\mathbb{C}} \oplus \ldots \oplus U_k^{\mathbb{C}}$.

Zobrazení

$$\{\text{podprostory ve } V\} \to \{\text{podprostory ve } V^{\mathbb{C}}\}$$

dané komplexifikací má velice přehledné vlastnosti.

Každý komplexní vektorový prostor můžeme chápat jako reálný (pomocí zúžení pole skalárů $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

V opačném směru pak máme zobrazení

$$\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : \left\{ \begin{array}{c} \text{podprostory} \\ \text{ve } V^{\mathbb{C}} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{podprostory} \\ \text{ve } V \end{array} \right\},$$

která jsou projekcemi na jednotlivé komponenty a jsou lineární nad $\mathbb{R}$. Přímé součty přechází na přímé součty.

Uvažme lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ na reálném vektorovém prostoru. Jeho charakteristický polynom $|A - \lambda I_n|$ je zároveň charakteristickým polynomem $\varphi^{\mathbb{C}}$ a má, včetně násobností, $n = \mathrm{dim} V$ (obecně komplexních) kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Budeme značit $Q_\lambda \subseteq V^{\mathbb{C}}$ vlastní podprostor příslušný vlastní hodnotě λ a $P_\lambda = \mathrm{Re}(Q_\lambda) \subseteq V$.

Lemma 15. Nechť λ je kořen charakteristického polynomu zobrazení $\varphi : V \to V$. Pak

1. Je-li λ reálné, je P_λ podprostor vlastních vektorů v V a $Q_\lambda = P_\lambda^{\mathbb{C}}$.

2. Je-li $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pak i $\bar{\lambda}$ je kořenem, platí $P_\lambda = P_{\bar{\lambda}}$ a $P_\lambda^{\mathbb{C}} = Q_\lambda \oplus Q_{\bar{\lambda}}$.

3. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vlastní hodnoty po dvou splňující $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_j$, pak součet podprostorů P_{λ_i} je přímý, $i = 1, \ldots, k$.

Věta 16. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární zobrazení na reálném vektorovém prostoru a všechny vlastní hodnoty jeho komplexifikace $\varphi^{\mathbb{C}}$ jsou různé. Označme e_{λ_i} generátory vlastních podprostorů $Q_{\lambda_i} \subset V^{\mathbb{C}}$. Pak

1. reálným vlastním hodnotám λ odpovídají jednorozměrné vlastní podprostory P_λ.

2. Dvojici různých, komplexně sdružených kořenů $\lambda, \bar{\lambda}$ odpovídá dvourozměrný podprostor $P_\lambda = P_{\bar{\lambda}}$ s generátory $x_\lambda = \mathrm{Re}(e_\lambda)$, $y_\lambda = \mathrm{Im}(e_\lambda)$.

3. Označme $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Pak $\varphi(x_\lambda) = \alpha x_\lambda - \beta y_\lambda$, $\varphi(y_\lambda) = \alpha y_\lambda + \beta x_\lambda$, tzn. zúžení φ na P_λ odpovídá složení násobení skalárem $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ a otočení o úhel $\arccos(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}})$.

Celkem má φ v této bázi blokově diagonální tvar a bloky řádů jedna a dva.