16. VLASTNÍ HODNOTY A VLASTNÍ VEKTORY

Ústřední pojmy této kapitoly jako *vlastní hodnota*, *vlastní vektor* a *spektrum lineárního operátoru* hrají klíčovou úlohu nejen v samotné lineární algebře, ale i v jejích aplikacích.

Budeme pracovat s vektorovým prostorem nad číselným tělesem K.

16.1. Matice lineárního operátoru a podobnost matic

Připomeňme, že *lineárním operátorem* na vektorovém prostoru V nebo též *lineární transformací* prostoru V nazýváme libovolné lineární zobrazení $\varphi : V \to V$.

Pokud V je konečně rozměrný, tak lineární operátor $\varphi : V \to V$ je injektivní právě tehdy, když je surjektivní, což je ekvivalentní s rovností $h(\varphi) = \dim V$.

Maticí lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi $\alpha = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n})$ nazýváme matici

$$
\begin{aligned}
(\varphi)_\alpha &= (\varphi)_{\alpha,\alpha} \\
&= ((\varphi(\mathbf{u}_1))_\alpha, \dots, (\varphi(\mathbf{u}_n))_\alpha) \in K^{n\times n},
\end{aligned}
$$

tvořenou souřadnicemi obrazů $\varphi(\mathbf{u}_j)$ vektorů $\mathbf{u}_j$ báze α vzhledem na *tu stejnou* bázi α.

Jedním ze základních záměrů této kapitoly bude dosáhnout vhodnou volbou báze α co nejjednodušší tvar matice $\mathbf{A} = (\varphi)_\alpha$ lineárního operátoru φ.

Poznamenajme, že pokud bychom netrvali na přirozeném požadavku vyjadřovat souřadnice vzorů i obrazů vektorů $\mathbf{x} \in V$ vzhledem na *tu stejnou bázi* prostoru V, šlo by o speciální případ – vždy totiž můžeme zvolit bázi β a bázi α prostoru V tak, že φ má vzhledem na bázi β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{n-h,h} & \mathbf{0}_{n-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$ a $h = h(\varphi)$.

Náš požadavek $\alpha = \beta$ značně zúžuje možnost naší volby, což komplikuje situaci.

Analogická úloha byla řešena pro symetrické bilineární formy – volbou vhodné báze lze vždy dosáhnout diagonální tvar matice příslušné formy.

Pro lineární operátory sa nám nic podobné nepodaří.

Prozkoumáme ale strukturu lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech do té míry, že dokážeme charakterizovat operátory diagonalizovatelné ve vhodné bázi a identifikovat překážky diagonalizovatelnosti u těch ostatních.

Na začátek si uvědomme vztah mezi maticemi lineárního operátoru vzhledem na různé báze. Platí:

Věta 1. Nechť $\varphi : V \to V$ je lineární transformace konečně rozměrného vektorového prostoru V a α, β jsou jeho dvě báze. Potom

$$(\varphi)_\beta = \mathbf{P}_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi)_\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta}.$$

Čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se nazývají *podobné*, píšeme $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ tak, že platí

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Zřejmě podobné matice mají stejnou hodnost a pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\begin{gathered}
\mathbf{A} \approx \mathbf{A}, \\
\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} \approx \mathbf{A}, \\
\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} \approx \mathbf{C} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \approx \mathbf{C}.
\end{gathered}$$

To znamená, že vztah podobnosti je *reflexivní*, *symetrická* a *tranzitivní relace*, t.j. je to *ekvivalence* na množině $K^{n\times n}$.

Máme pak

Věta 2. Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice téže lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem na nějaké dvě báze prostoru V;

(ii) $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$.

Stopu matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, píšeme $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ (z anglického *trace*), definujeme jako součet jejích diagonálních prvků, t. j.

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Tvrzení 3. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbf{K}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$. Potom

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}).$$

Důkaz. Označme $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (c_{ij})_{m\times m}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = (d_{jk})_{n\times n}$. Jednoduchým výpočtem

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{jj}\\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Důsledek 4. Podobné matice mají stejný determinant i stopu.

Determinant a stopa jsou *invarianty podobnosti matic*.

Pokud tedy matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ mají různé determinanty nebo různé stopy, tak nemohou být podobné. Na druhé straně však ani rovnost determinantu a stopy ještě nezaručují jejich podobnost.

16.2. Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárního operátoru a matice

Lineární operátor $\varphi : V \to V$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V se nazývá *diagonalizovatelný*, pokud existuje nějaká báze prostoru V, vzhledem ke které má φ diagonální matici.

Nechť tedy $\varphi : V \to V$ je diagonalizovatelný lineární operátor a $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ je taková báze prostoru V, že matice $\mathbf{B} = (\varphi)_\beta$ je diagonální se skaláry $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ na diagonále. Potom pro bázické vektory $\mathbf{v}_i$ platí

$$\varphi(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

Říkáme, že skalár $\lambda \in K$ je *vlastní* nebo též *charakteristická hodnota* (*číslo*) lineárního operátoru $\varphi : V \to V$, pokud existuje vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$, pro který platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Tento vektor nazýváme *vlastní* nebo též *charakteristický vektor* lineárního operátoru $\varphi : V \to V$.

Říkáme také, že $\mathbf{v}$ je *vlastní vektor příslušející k vlastní hodnotě* λ, resp. že λ je *vlastní hodnota příslušející k vlastnímu vektoru* $\mathbf{v}$.

Vlastní hodnota příslušející k danému vlastnímu vektoru je určená jednoznačně; na druhé straně, k dané vlastní hodnotě může příslušet víc, dokonce lineárně nezávislých vektorů.

Vlastní (charakteristickou) hodnotou (vlastním číslem), resp. vlastním (charakteristickým) vektorem čtvercové matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ nazýváme vlastní hodnotu, resp. vlastní vektor lineárního operátoru $K^n \to K^n$ daného předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Vlastní hodnota $\lambda \in K$ a k ní příslušející vlastní vektor $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in K^n$ matice $\mathbf{A}$ jsou tak spojeny vztaeom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

Vlastní hodnoty podobných matic jsou vlastními hodnotami téhož lineárního operátoru.

Tvrzení 5. Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty.

Říkáme, že lineární podprostor S vektorového prostoru V je *invariantní podprostor* lineárního operátoru $\varphi : V \to V$, pokud platí $\varphi(S) \subseteq S$, t. j. $\varphi(\mathbf{x}) \in S$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Jednorozměrný podprostor $[\mathbf{v}]$ generovaný vlastným vektorom $\mathbf{v}$ lineárního operátora je speciálním případem invariantního podprostoru.

Triviální podprostor $\{\mathbf{0}\}$ a nevlastní podprostor V jsou vždy invariantní.

Jednorozměrný podprostor $[\mathbf{v}]$ je invariantní právě tehdy, když $\mathbf{v}$ je vlastní vektor příslušného operátoru.

Jednorozměrné podprostory generované vlastními vektory lineárního operátoru jsou tedy příklady netriviálních, a pokud navíc $\dim V > 1$, tak i vlastních invariantních podprostorů.

Pokud S je invariantní podprostor lineární transformace $\varphi : V \to V$, tak zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S je opět lineární operátor $\varphi \restriction S : S \to S$ na vektorovém prostoru S.

Pokud $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{u_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_n})$ je báze prostoru V taková, že jejích prvních k vektorů tvoří bázi invariantního podprostoru S, tak matice φ v této bázi má blokový tvar

$$\mathbf{A} = (\varphi)_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{M} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_1 \in K^{k\times k}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction S : S \to S$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a $\mathbf{M} \in K^{k\times(n-k)}$, $\mathbf{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$.

Pokud $V = S \oplus T$ je dokonce přímým součtem invariantních podprostorů S, T, tak V má bázi $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}, \mathbf{u_{k+1}}, \ldots, \mathbf{u_n})$, jejichž prvních k vektorů tvoří bázi S a zbývajících $n-k$ vektorů tvoří bázi T.

Vzhledem k takovéto bázi má matice operátoru

φ blokově diagonální tvar

$$\mathbf{A} = (\varphi)_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0}_{k,n-k} \\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2),$$

kde $\mathbf{A}_1 \in K^{k\times k}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction S : S \to S$ v bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ a $\mathbf{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$ je matice lineární transformace $\varphi \restriction T : T \to T$ v bázi $(\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

Toto pozorovaní můžeme zřejmým způsobem zevšeobecnit na přímý součet libovolného konečného počtu invariantních podprostorů.

Věta 6. Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) φ je diagonalizovatelný;

(ii) existuje báze prostoru V sestávající z vlastních vektorů operátoru φ;

(iii) V je přímým součtem jednorozměrných invariantních podprostorů lineárního operátoru φ.

V tomto případě má matice operátora φ v bázi vlastních vektorů $\beta = (\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n})$ tvar

$$(\varphi)_\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

kde λ_i je vlastně hodnota příslušející k vlastnímu vektoru $\mathbf{v}_i$.

Tvrzení 7. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty lineárního operátoru $\varphi : V \to V$. Potom k nim příslušející vlastní vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení 8. Nechť φ je lineární operátor na n-rozměrném vektorovém prostoru V. Pokud φ má n navzájem různých vlastních hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tak je φ je diagonalizovatelný v bázi jim příslušejícím vlastních vektorů. Navíc každý vlastní vektor $\mathbf{v}_i$ příslušející k vlastní hodnotě λ_i je určený jednoznačně až na skalární násobek.

16.3. Charakteristický polynom

Nyní si ukážeme, jak k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ můžeme najít její vlastní hodnoty a k nim příslušné vlastní vektory.

Reprezentace lineárního operátoru na konečně rozměrném vektorovém prostoru pomocí jeho matice v nějaké bázi nám potom umožní vyriešit analogickou úlohu i pro něj.

Charakteristickým polynomem matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ nazýváme polynom

$$
\begin{aligned}
\mathsf{ch}_{\mathbf{A}}(x) &= \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

v proměnné x s koeficienty z číselného tělesa K, t. j. $\mathsf{ch}_{\mathbf{A}}(x) \in K[x]$. Charakteristický polynom je zřejmě polynom stupně n s koeficientem $(-1)^n$ při nejvyšší mocnině x^n.

Charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{A}$ nazýváme rovnici $\mathsf{ch}_{\mathbf{A}}(x) = 0$, t. j.

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}_n) = 0.$$

Věta 9. Nech $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$. Potom skalár $\lambda \in K$ je vlastní hodnotou matice $\mathbf{A}$ právě tehdy, když

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0,$$

t. j. právě tehdy, když λ vyhovuje charakteristické rovnici matice $\mathbf{A}$.

Zejména tedy vlastní vektory čtvercové matice $\mathbf{A}$ příslušející k její vlastní hodnotě λ jsou právě všechny nenulová řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$; přitom právě singularita uvedené matice zaručuje jejich existenci.

Věta 10. Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$. Pokud $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$, tak $\mathsf{ch}_{\mathbf{A}} = \mathsf{ch}_{\mathbf{B}}$; jinak řečeno, podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Charakteristický polynom je *invariantem* podobnosti matic.

Tato jeho vlastnosť nám umožňuje korektně zadefinovat i *charakteristický polynom* $\mathsf{ch}_{\varphi}(x)$ *lineární transformace* φ konečně rozměrného vektorového prostoru V jako charakteristický polynom matice této transformace vzhledem k libovolné bázi prostoru V.

Vlastní hodnoty takovéto lineární transformace jsou potom totožné s vlastními hodnotami její matice.

16.4. Příklady

Příklad 11. Souměrnost roviny podle osy procházející počátkem a svírající s osou x úhel α je lineární operátor $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ matici

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{S}_\alpha - x\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha - x & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = x^2 - 1$$

má dva kořeny $x_{1,2} = \pm 1$.

K nim příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenních soustav s maticemi

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_\alpha - \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha - 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_\alpha + \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha + 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Oba podprostory řešení jsou jednorozměrné, generované vektory $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ respektive $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$.

To znamená, že operátor $\mathbf{S}_\alpha$ má vzhledem k bázi tvořené sloupci matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

diagonální matici

$$\mathsf{diag}(1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ je směrový vektor naší osy souměrnosti a $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$ je směrový vektor kolmice na ni v počátku, což se přesně shoduje s geometrickým názorem.

Příklad 12. Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární operátor $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$ matici

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{R}_\alpha - x\mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 2x\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= x^2 - 2x\cos\alpha + 1$$

má diskriminant $D = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha$.

Mimo triviální případ, když $\sin\alpha = 0$, t. j. $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{I}_2$, kterým se dále nebudeme zabývat, je $D < 0$, tedy charakteristický polynóm nemá reálné kořeny. Preto $\mathbf{R}_\alpha$ nemá reálné vlastní hodnoty a není podobná se žádnou diagonální maticí nad $\mathbb{R}$.

V číselném těleso $\mathbb{C}$ její charakteristický polynom už má dva kořeny $x_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathsf{i}\sin\alpha = \mathsf{e}^{\pm\mathsf{i}\alpha}$, kterým odpovídající vlastní vektory dostaneme řešením homogenních soustav s maticemi

$$\mathbf{R}_\alpha - \mathsf{e}^{\mathsf{i}\alpha}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\mathsf{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\mathsf{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\mathsf{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\mathbf{R}_\alpha - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\alpha}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathsf{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \mathsf{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathsf{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oba podprostory řešení jsou jednorozměrné, generované vektory $(1, -\mathsf{i})^T$ resp. $(1, \mathsf{i})^T$. To znamená, že operátor $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ daný předpisem $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{x}$ má vzhledemm k bázi tvořené sloupci matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathsf{i} & \mathsf{i} \end{pmatrix}$$

diagonální matici $\mathsf{diag}(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\alpha}, \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\alpha})$.