15. UNITÁRNÍ PROSTORY

Kanonický diagonální tvar libovolné symetrické bilineární formy na konečně rozměrném vektorovém prostoru nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je jednoznačně určený její hodností.

Symetrická regulární bilineární forma na komplexním vektorovém prostoru nevytváří geometrickou strukturu analogickou reálnemu případu.

Zdánlivě nepatrnou modifikací pojmu bilineární formy můžeme tuto překážku geometrizace překlenout.

Motivace:

Velikost vektoru v $\mathbb{C}^2$ – $||(z_1, z_2)||^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Přitom $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, pro $z = a + \mathrm{i}b$ tj. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Poznamenejme, že pokud z je komplexní číslo, které není reálné, pak $|z|^2 \neq z^2$.

Chceme-li definovat na $\mathbb{C}^2$ skalární součin, který by definoval kladnou normu, nemůžeme brát

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2,$$

ale

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \cdot \overline{y_1} + x_2 \cdot \overline{y_2}.$$

15.1. Seskvilineární formy

Seskvilineární formou na komplexním vektorovém prostoru V nazýváme zobrazení $F : V \times V \to \mathbb{C}$ takové, že pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $c \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= F(\mathbf{x},\mathbf{z}) + F(\mathbf{y},\mathbf{z}), \\ F(c\mathbf{x},\mathbf{z}) &= cF(\mathbf{x},\mathbf{z}), \\ F(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= F(\mathbf{x},\mathbf{y}) + F(\mathbf{x},\mathbf{z}), \\ F(\mathbf{x},c\mathbf{y}) &= \overline{c}F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Říkáme, že F je lineární v první proměnné a *antilineární* v druhé proměnné.

Pokud V je konečně rozměrný a $\alpha = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_n})$ je jeho báze, tak matici

$$\mathbf{A} = [F]_\alpha = (F(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k)) \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

podobně jako v reálném případě, nazýváme *maticí seskvilineární formy* F v bázi α.

Potom pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ se souřadnicemi $(\mathbf{x})_\alpha = (x_1, \dots, x_n)^T$, $(\mathbf{y})_\alpha = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{(\mathbf{y})}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j \overline{y}_k,$$

kde $\overline{(\mathbf{y})}_\alpha = (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_k)^T$.

$\mathbf{A} = (a_{jk})_{n \times n} = [F]_\alpha$ je jediná matice s touto vlastností.

Je-li $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ druhá báze prostoru V, tak matice $\mathbf{A} = [F]_\alpha$, $\mathbf{B} = [F]_\beta$ jsou spojené vztahem

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{P}}_{\alpha,\beta},$$

kde $\overline{\mathbf{P}}_{\alpha,\beta} = (\overline{p}_{jk})$ je matice komplexně sdružená k matici přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = (p_{jk})$.

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou maticemi téže seskvilineární formy vzhledem k bazím α, β právě tehdy, když $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{P}}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Tedy $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou maticemi téže seskvilineární formy vzhledem k bazím α, β právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q},$$

kde $\mathbf{Q}^* = \overline{\mathbf{Q}^T} = \overline{\mathbf{Q}}^T$ označuje matici transponovanou a komplexně sdruženou k matici $\mathbf{Q}$

Říkáme, že $\mathbf{Q}^*$ je *hermitovsky sdružená* nebo též *adjungovaná matice* k matici $\mathbf{Q}$.

Skutečně, pokud položíme $\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{P}}$, tak $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^T$.

Protože číselné těleso $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je rozšířením číselného tělesa $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, každý vektorový prostor V nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ můžeme zároveň považovať za vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Tento vektorový prostor budeme značit $V_{\mathbb{R}}$ a nazývat *reálným zúžením* nebo též *zreálněním* prostoru V.

Každé zobrazení $F : V \times V \to \mathbb{C}$ určuje před-

pisy

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{Re} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{Im} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, zobrazení $F_0 = \mathrm{Re} F$, $F_1 = \mathrm{Im} F : V \times V \to \mathbb{R}$.

Potom $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathrm{i} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Tvrzení 1. Nechť $F : V \times V \to \mathbb{C}$ je libovolné zobrazení. Potom F je seskvilineární forma právě tehdy, když $F_0 = \mathrm{Re} F$, $F_1 = \mathrm{Im} F$ jsou bilineární formy na reálném vektorovém prostoru $V_{\mathbb{R}}$ a pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_1(\mathrm{i}\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_0(\mathbf{x}, \mathrm{i}\mathbf{y}).$$

Tedy každá ze složek F_0, F_1 seskvilineární formy F jednoznačně určuje druhou.

15.2. Hermitovské formy a hermitovské matice

Říkáme, že *seskvilineární forma* F na komplexním vektorovém prostoru V je *hermitovská* nebo též *kososymetrická*, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{F(\mathbf{y}, \mathbf{x})}.$$

Tvrzení 2. Seskvilineární forma $F : V \times V \to \mathbb{C}$ je hermitovská právě tehdy, když její složky $F_0 = \text{Re}F$, $F_1 = \text{Im}F$ splňují podmínky

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_0(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \qquad F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -F_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Podle předchozích tvrzení můžeme každou hermitovskou formu $F : V \times V \to \mathbb{C}$ rozložit na součet $F = F_0 + \mathrm{i}F_1$ dvou bilineárních reálných forem $F_0, F_1 : V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, z nichž první je symetrická, druhá antisymetrická a platí $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_0(\mathbf{x}, \mathrm{i}\mathbf{y})$ neboli $F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_1(\mathrm{i}\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Čtvercová *matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se nazývá *hermitovská* nebo též *kososymetrická*, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, t. j. $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$ pro všechny $j, k \leq n$.

Zejména, $a_{jj} = \overline{a}_{jj}$, tedy všechny diagonální prvky hermitovské matice jsou reálné.

Zřejmě $\mathbf{A}$ je hermitovská právě tehdy, když seskvilineární forma $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{y}}$ na (sloupcovém) vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$ je hermitovská.

Pokud $F : V \times V \to \mathbb{C}$ je hermitovská forma, tak $F(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \overline{F(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, tedy všechny hodnoty $F(\mathbf{x},\mathbf{x})$ jsou reálné, má tedy smysl ptát se na jejich znaménko.

To nám v komplexním případě umožňuje zavést pro hermitovské formy a hermitovské matice všechny pojmy související s definitností a se signaturou stejně, jako v reálném případě pro symetrické bilineární formy a symetrické matice.

Z antisymetrie formy $F_1 = \mathrm{Im} F$ platí

$$F(\mathbf{x},\mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x},\mathbf{x}), \qquad F_1(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0,$$

takže na $F(\mathbf{x},\mathbf{x})$ se můžeme dívat jako na kvadratickou formu na reálném vektorovém prostoru $V_{\mathbb{R}}$.

Signaturu hermitovské matice $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, a tím i hermitovské formy $F \ : V^2 \to \mathbb{C}$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$, můžeme zjistit její úpravou na diagonální tvar podle schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\overline{\text{ESO}}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}.$$

Na matici $\mathbf{A}$ tedy vždy provedeme jednu ERO a jí odpovídající ESO s *komplexně sdruženým skalárem* (tedy výměně dvou řádků odpovídá výměna příslušných sloupců, avšak vynásobení j-tého řádku nenulovým skalárem $c \in \mathbb{C}$ odpovídá vynásobení j-tého sloupce skalárem $\overline{c}$ a přičtení c-násobku j-tého řádku ke k-tému řádku odpovídá přičtení $\overline{c}$-násobku j-tého sloupce ke k-tému sloupci).

Na jednotkové matici $\mathbf{I}_n$ provedeme příslušnou ESO s původním skalárem.

Potom $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{P}}$ a sloupce matice $\mathbf{P}$ tvoří bázi β prostoru $\mathbb{C}^n$, vzhledem ke které má hermitovská forma $\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{y}}$ diagonální (a tedy nutně reálnou) matici $\mathbf{B}$.

Pokud $\mathbf{A}$ byla maticí hermitovské formy F na n-rozměrném vektorovém prostoru V v bázi α, tak diagonální matice $\mathbf{B}$ je maticí formy F v bázi $\beta = \alpha \cdot \mathbf{P}$, a tedy $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je maticí přechodu z báze β do bázy α.

Uvedený postup vede vždy k cíli. Navíc můžeme dosáhnout toho, aby matice $\mathbf{B}$ měla na diagonále jen skaláry ± 1 a 0.

I v tomto případě platí Sylvestrův zákon setrvačnosti, tedy signatura hermitovské formy či matice je dobře definovaná a jsou splněny jednoduché analogie výsledků pro reálné symetrické bilineární formy a matice z paragrafu 12.1.

15.3. Komplexní skalární součin a unitární prostory

Skalárním nebo též *vnitřním součinem* na komplexním vektorovém prostoru V nazýváme libovolnou kladně definitní hermitovskou seskvilineární formu na V; její hodnotu na vektorech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ budeme značiť opět $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Komplexní vektorový prostor V vybavený skalárním součinem nazýváme *unitární prostor*.

Skalární součin na V budeme definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{C}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí komplexní číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{C}$ platí:

$$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$$
(aditivita),

$$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$
(homogenita),

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$$
(kosá symetrie),

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$$
(kladná definitnost).

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu dává jeho linearitu jako funkce první proměnné (při pevné druhé proměnné). Dík kosé symetrii z toho vyplývá antilinearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y} \rangle &= \overline{c} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,\end{aligned}$$

pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{C}$.

Z kosé symetrie vyplývá reálnost výrazu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$, což dává smysl podmínce kladné definitnosti; ze seskvilinearity potom vyplývá

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \ \& \ (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Většinu pojmů, které jsme definovali pre euklidovské prostory, můžeme zavést i pro (konečně rozměrné) unitární prostory a většinu výsledků o euklidovských prostorech můžeme s malými modifikacemi dokázat i pro (konečně rozměrné) unitární prostory.

Protože $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, *délku* neboli též *normu vektoru* $\mathbf{x}$ v unitárním prostoru V můžeme definovat jako nezáporné reálné číslo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Zřejmě $\|\mathbf{x}\|$ je norma na vektorovém prostoru $V_{\mathbb{R}}$ pocházející z reálného skalárního součinu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_0 = \text{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, tedy jsou pro ni splněné všechny tři definující podmínky (trojúhelníková nerovnost, pozitivní homogenita, oddělitelnost) z paragrafu 13.3. Navíc podmínka pozitivní homogenity

$$\|c\mathbf{x}\| = |c| \, \|\mathbf{x}\|$$

platí pro všechna $\mathbf{x} \in V$, $c \in \mathbb{C}$ (a ne pouze pro $c \in \mathbb{R}$).

Totiž,

$$\|c\mathbf{x}\|^2 = \langle c\mathbf{x}, \mathbf{c}\mathbf{x}\rangle = c\overline{c}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = |c|^2 \|\mathbf{x}\|^2 .$$

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti pro reálný skalární součin dostáváme nerovnost

$$|\mathrm{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| ,$$

z které už vyplývá trojúhelníková nerovnost pro normu.

Tvrzení 3. **(Cauchy-Schwartzova nerovnost)** Nechť V je unitární prostor. Potom pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| ,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Pro nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ představuje výraz $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ komplexní číslo s absolutní hodnotou ≤ 1. Analogie s reálným případem nás svádí pokusit se na jeho základě zadefinovat úhel vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Nabízí se nám tři možnosti:

(1) Reálná část $\mathrm{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ skalárního součinu $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ je skalární součinem na reálném zúžení $V_{\mathbb{R}}$ unitárního prostoru V, který plně určuje jeho normu. V tomto případě

$$\alpha = \arccos \frac{\mathrm{Re}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

představuje úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ v prostoru $V_{\mathbb{R}}$.

(2) Úhel vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ můžeme definovat jako úhel přímek $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{v}]$, t. j. jako reálné číslo

$$\alpha = \arccos \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

V reálném případě by takovýto postup odpovídal nahrazení odchylky vektorů $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ odchylkou přímek $\sphericalangle([\mathbf{u}], [\mathbf{v}])$; to znamená, že mezi odchylkami dvojic $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a $(\mathbf{u}, -\mathbf{v})$ bychom nerozlišovali a z původních úhlů $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\sphericalangle(\mathbf{u}, -\mathbf{v})$ bychom vybrali ten menší.

Přímky $[\mathbf{u}]$, $[\mathbf{v}]$ v komplexním vektorovém prostoru V jsou z reálného hlediska dvojrozměrné, t. j. jsou to roviny v $V_{\mathbb{R}}$.)

(3) Prostředky teorie funkcí komplexní proměnné můžeme definiční obor reálné funkce $\arccos$, t. j. interval $\langle -1, 1\rangle$, rozšířit na jednotkový kruh $\{c \in \mathbb{C};\ |c| \leq 1\}$ (dokonce na celou komplexní rovinu $\mathbb{C}$). Potom odchylka $\sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ by bylo *komplexné číslo*

$$\alpha = \arccos \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

takové, že

$$\cos \alpha = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\alpha} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\alpha}}{2} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Úhel dvou nenulových vektorů v unitárním prostoru nebudeme skoumat ani definovat.

Ale relace ortogonality

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

na vektorech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a operace ortokomplementu

$$X^{\perp} = \{\mathbf{y} \in V; \, (\forall\, \mathbf{x} \in X)(\mathbf{x} \perp \mathbf{y})\}$$

na množinách $X \subseteq V$ mají stejné vlastnosti jako v reálném případě.

Rovněž pojmy ortogonální či ortonormální množiny nebo uspořádané k-tice vektorů, a ortogonální a ortonormální báze jsou definované stejným způsobem.

Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem můžemo dokázat, že konečně rozměrný unitární prostor V má ortonormální bázi.

Vzhledem k této bázi β nabývá skalární součin na V tvar tzv. *standardního komplexního skalárního součinu* na $\mathbb{C}^n$, t. j. pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ se souřadnicemi $(\mathbf{x})_\beta = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $(\mathbf{y})_\beta = (y_1, \ldots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \textstyle\sum_{j=1}^n x_j \overline{y}_j &= (\mathbf{x})_\beta^T \cdot \overline{(\mathbf{y})}_\beta \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{y} \rangle, \end{aligned}$$

přičemž jednotlivé složky souřadnic vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ jsou

$$x_j = \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle, \qquad y_j = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_j \rangle.$$

Speciálně pro $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ dostáváme *Parsevalovu rovnost*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j \right|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_j \rangle \right|^2 .$$