13. EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

V této kapitole se pokusíme o naplnění lineární algebry geometrickým obsahem ve vektorových prostorech nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Ukazuje se, že celou základní geometrickou strukturu, včetně délek a úhlů, můžeme odvodit z jediné kladně definitní symetrické bilineární formy na tomto prostoru.

13.1. Skalární součin

Skalární nebo též *vnitřním součinem* na reálném vektorovém prostoru V rozumíme libovolnou kladně definitní, symetrickou bilineární formu na V. Hodnotu této formy na vektorech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ budeme značit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

Nezávisle na znalosti uvedených pojmů můžeme skalární součin na V definovat jako binární operaci $V \times V \to \mathbb{R}$, která každé dvojici $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vektorů z V přiřadí reálné číslo $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí:

$\langle \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$ (aditivita),

$\langle c\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (homogenita),

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (symetrie),

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ (kladná definitnost).

Spojení aditivity a homogenity skalárního součinu nám dává jeho linearitu jako funkci první proměnné (při pevné druhé proměnné).

Ze symetrie plyne i linearita skalárního součinu jako funkce druhé proměnné (při pevné první proměnné), t. j. rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2\rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2\rangle,\\ \langle \mathbf{x}, c\mathbf{y}\rangle &= c\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\end{aligned}$$

pre všetky $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c \in \mathbb{R}$.

Z (bi)linearity plyne podmínka kladné definitnosti

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \ \& \ (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0})$$

pro každé $\mathbf{x} \in V$.

První část této podmínky nám umožňuje definovat *normu* neboli *délku vektoru* $\mathbf{x}$ rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Výraz $\|\mathbf{x}\|^2$ budeme zatím chápat jen jako jiné označení pro kvadratickou formu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ indukovanou skalárním součinem.

Euklidovským prostorem nazýváme libovolný *konečně rozměrný* reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

Příklad 1. Ze střední školy v rámci analytické geometrie, případně v rámci fyziky, jsme se potkali s skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ v rovině $\mathbb{R}^2$ a se skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.

Lehce se můžeme přesvědčit, že stejný vzoreček funguje pro každé n, t. j. pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ je předpisem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definovaný skalární součin na sloupcovém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$. V případě řádkového prostoru $\mathbb{R}^n$ máme

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pro $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Takovýto skalární součin budeme nazývat *standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$. Standardní skalární součin vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (ať už jde o řádkové nebo sloupcové vektory) se obvykle značí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Délka vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}.$$

V rámci analytické geometrie se pro nenulové vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dokazuje známý vztah

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

který spojuje standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ či v $\mathbb{R}^3$ s délkou příslušných vektorů a jimi sevřeným úhlem α.

13.2. Gramova matice a Cauchyho-Schwartzova nerovnost

Nechť $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ je libovolná uspořádaná k-tice vektorů ve vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Téměř všechny podstatné informace o těchto vektorech jsou ukryté v tzv. *Gramově matici*

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}) = (\langle \mathbf{u_i}, \mathbf{u_j} \rangle)_{\mathbf{k} \times \mathbf{k}}$$

vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Determinant Gramovy matice

$$\begin{aligned}\det \mathbf{G}(\alpha) &= |\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \\ &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_1 \rangle & \ldots & \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle \end{vmatrix}\end{aligned}$$

se nazývá *Gramovým determinantem* vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Tvrzení 2. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou libovolné vektory ve vektorovém prostoru V se skalárním součinem. Potom

(a) $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je kladně semidefinitní symetrická matice;

(b) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ je kladně definitní.

Důkaz. Označme $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$.

(a) Symetrie matice $\mathbf{G}$ je přímým důsledkem symetrie skalárního součinu. Zbývá dokázat, že pro libovolný vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T \geq 0$.

Položme $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k$. Potom z bilinearity a kladné definitnosti skalárního součinu vyplývá

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_i c_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0.$$

(b) Pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně nezávislé, tak tvoří zejména bázi lineárního podprostoru $S = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] \subseteq V$.

Zúžení skalárního součinu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ na podprostor S je skalární součin (t. j. kladně definitní symetrická bilineární forma) na S.

$\mathbf{G}$ je maticí této formy vzhledem k bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, tedy kladně definitní matice.

Jsou-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně závislé, tak v $\mathbb{R}^n$ existuje vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_k) \neq \mathbf{0}$ takový, že $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Potom podle (a)

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}^T = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle = 0,$$

tedy $\mathbf{G}$ není kladně definitní. ■

Důsledek 3. Pro libovolné $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ platí

$$|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| \geq 0.$$

Přitom $|\mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)| = 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou lineárně závislé.

Speciálně pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$\begin{aligned}
|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle & \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Tím je dokázaná tzv. *Cauchyho-Schwartzova nerovnost*:

Tvrzení 4. Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ v prostoru V se skalárním součinem platí

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \, ,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

13.3. Délka vektoru a úhel dvou vektorů

Normou na reálném vektorovém prostoru V rozumíme libovolné zobrazení $V \to \mathbb{R}$, které vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí reálné číslo $\|\mathbf{x}\|$, nazývané *normou* nebo též *délkou vektoru* $\mathbf{x}$, takové, že pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ a libovolné $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{(trojúhelníková nerovnost)},$$

$$\|c\mathbf{x}\| = |c|\,\|\mathbf{x}\| \quad \text{(pozitivní homogenita)},$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{(oddělitelnost)}.$$

Z uvedených podmínek vyplývá nezápornost normy, t. j. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$.

Z pozitivní homogenity platí $\|\mathbf{0}\| = 0$ a $\|-\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, s použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|+\|-\mathbf{x}\|) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{0}\| = 0.$$

Z oddělitelnosti máme $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$.

Reálný vektorový prostor s normou nazýváme *normovaný prostor*. Intuitivně sa na normovaný prostor díváme jako na vektorový prostor, ve kterém můžeme měřit délky vektorů.

Tři definující podmienky pro normu zaručují, že takovéto měření délek, t. j. přiřazení $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, má rozumné vlastnosti, jaké od délek očekáváme.

Vzdáleností bodů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$ nazýváme délku vektoru $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, t. j. číslo $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. Pomocí vzdálenosti bodů můžeme trojúhelníkovou nerovnost vyjadriť jiným, ekvivalentním způsobem:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|$$

pre všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$.

Tvrzení 5. Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Rovností

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

je definovaná norma na V.

Důkaz. Zvolme $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. S použitím bilinearity a symetrie skalárního součinu a Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.
\end{aligned}$$

To dokazuje trojúholníkovou nerovnost. ■

Z Cauchyho-Schwartzovy nerovnosti vyplývá, že pre libovolné *nenulové* vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Proto existuje jediné reálné číslo α takové, že $0 \leq \alpha \leq \pi$ a

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}.$$

Číslo α nazýváme *úhlem* nebo též *odchylkou vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a značíme ho $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ze symetrie skalárního součinu vyplývá $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, to znamená, že se jedná o *neorientovaný úhel*.

Při této definici úhlu dvou nenulových vektorů

zůstáva vztah

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

platný pro standardní skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, zachovaný v libovolném prostoru se skalárním součinem.

Říkáme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ jsou (navzájem) *kolmé* nebo též *ortogonální*, píšeme $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, pokud $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Tvrzení 6. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:

(a) $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff (\exists\, c \in \mathbb{R})(c > 0 \;\&\; \mathbf{x} = c\mathbf{y})$;

(b) $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi \iff (\exists\, c \in \mathbb{R})(c < 0 \;\&\; \mathbf{x} = c\mathbf{y})$;

(c) $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi/2 \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$;

(d) $\sphericalangle(-\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = \pi - \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\sphericalangle(-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Tvrzení 7. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem. Potom pro libovolné nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:

(a) (**kosinová věta**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\sphericalangle(\mathbf{x},\mathbf{y});$$

(b) (**Pythagorova věta**)

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2;$$

(c) (**pravidlo rovnoběžníka**)

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2);$$

(d) (**úhlopříčky kosoštvorce jsou na sebe kolmé**)

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \;\Rightarrow\; \mathbf{x}+\mathbf{y} \perp \mathbf{x}-\mathbf{y}.$$

13.4. Ortogonální a ortonormální báze

Uspořádaná k-tice $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k})$ vektorů z vektorového prostoru se skalárním součinem V, se nazývá *ortogonální*, pokud $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ pro všechna $1 \leq i < j \leq k$.

Říkáme též, že *vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ jsou (navzájem) *ortogonální* neboli *kolmé*.

Uspořádaná k-tice $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ sa nazývá *ortonormální*, pokud je ortogonální a $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ pro všechna $i \leq k$. Říkáme, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří *ortonormální systém*.

Podobně můžeme definovat pojmy ortogonálnosti a ortonormálnosti i pro nekonečné posloupnosti $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ vektorů z V, případně pro množiny $X \subseteq V$.

Tvrzení 8. Nechť V je vektorový prostor so skalárním součinem. Potom pro libovolnou k-tici $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_k}) \in \mathbf{V^k}$ platí:

(a) α je ortogonální právě tehdy, když její Gramova matice $\mathbf{G}(\alpha)$ je diagonální;

(b) α je ortonormální právě tehdy, když $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{I_k}$.

Důsledek 9. Pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ jsou navzájem kolmé nenulové vektory, speciálně, pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří ortonormální systém, tak jsou lineárně nezávislé.

Věta 10. Každý euklidovský prostor má ortonormální bázi.

Tvrzení 11. Nechť $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$ je ortonormální báze euklidovského prostoru V. Potom pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí:

(a)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \mathbf{u}_i,$$

t. j.

$$(\mathbf{x})_\alpha = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_n \rangle)^T;$$

(b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{y} \rangle;$

(c) $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle^2.$

Podmínka (c), stejně jako její nekonečně rozměrná varianta, se nazývá *Parsevalova rovnost*.

Věta 12. Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ definujeme pomocí rekurze:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \qquad \text{a} \qquad \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i,$$

pro $1 < k \leq n$.

Potom $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jsou ortogonální vektory a pro každé $1 \leq k \leq n$ platí

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k].$$

Speciálně, pokud $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru V, tak $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ je ortogonální báze prostoru V; potom vektory $\|\mathbf{v}_1\|^{-1}\mathbf{v}_1, \ldots, \|\mathbf{v}_n\|^{-1}\mathbf{v}_n$ tvoří ortonormální bázi prostoru V.

Důkaz. Popíšeme algoritmus, který umožňuje sestrojit ortonormální báze, známý pod názvem *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces*.

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ jsou lineárně nezávislé vektory.

Chceme sestrojit ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

tak, aby pre každé $k \leq n$ platilo

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k].$$

Pokud položíme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, tak samozřejmě $[\mathbf{v}_1] = [\mathbf{u}_1]$. Vektor $\mathbf{v}_2 \in [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2]$ budeme hledat ve tvaru $\mathbf{v}_2 = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{u}_2$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud má však platit $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$, musí být $b \neq 0$.

To nejlépe dosáhneme volbou $b = 1$. Navíc vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_1$ má být kolmý na vektor $\mathbf{v}_1$, t. j.

$$0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle + a\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle.$$

Odtud dostáváme

$$a = -\frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}.$$

Předpokládejme, že $2 \leq k \leq n$ a už jsme sestrojili ortogonální vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ takové, že pro každé $1 \leq i \leq k-1$ platí $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i]$.

Poučení případem $k = 2$ budeme vektor $\mathbf{v}_k \in [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k] = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{u}_k]$ hledat ve tvaru $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$, kde $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Navíc vektor $\mathbf{v}_k$ musí být kolmý na každý z vek-

torů $\mathbf{v}_i$ pre $1 \leq i \leq k-1$, tj.

$$0 = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{j=1}^{k-1} a_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle + a_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle,$$

neboť dle našeho předpokladu $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ pro $j \neq i$.

Z tohoto důvodu

$$a_i = -\frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}.$$