12. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY NAD ČÍSELNÝM TĚLESEM $\mathbb{R}$

V této části se omezíme na bilineární a kvadratické formy na vektorových prostorech nad číselným tělesem reálných čísel. Tento zvláštní případ je najdůležitější z hlediska aplikací lineární algebry v geometrii a matematické analýze.

Množina reálných čísel je mimo strukturu číselného tělesa vybavená relací uspořádání, která je vhodně sladěná se sčítáním a násobením na $\mathbb{R}$.

Navíc, pro $a \in \mathbb{R}$ platí $a \geq 0$ právě tehdy, když existuje nějaké $b \in \mathbb{R}$ tak, že $a = b^2$. Tato vlastnost nám umožní objasnit a klasifikovat strukturu bilineárních a kvadratických forem nad $\mathbb{R}$.

12.1. Signatura

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice. Pak $\mathbf{A}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ mají stejnou hodnost $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$, která se rovná počtu nenulových prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$. Mimo hodnost jsou však i počty kladných a záporných prvků na diagonále matice $\mathbf{B}$ invarianty, společnými pro navzájem kongruentní matice.

Pro libovolnou *diagonální* matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

položme

$$\sigma(\mathbf{A}) = (s_+, s_-, s_0),$$

kde s_+ je počet kladných, s_- počet záporných a s_0 počet nulových prvkov na diagonále matice $\mathbf{A}$. Uspořádanou trojici $\sigma(\mathbf{A}) = (s_+, s_-, s_0)$ nazýváme pak *signaturou matice* $\mathbf{A}$.

Složky signatury $\sigma(\mathbf{A})$ nejsou nezávislé. Platí totiž

$$s_+ + s_- = h(\mathbf{A}) \qquad \text{a} \qquad s_+ + s_- + s_0 = n,$$

to znamená, že při znalosti rozměru n a hodnosti $h(\mathbf{A})$ je signatura jednoznačně určená už jedním z čísel s_+, s_-. Z tohoto důvodu někteří autoři definují signaturu jen jako počet s_+.

Věta 1. **(Sylvestrův zákon setrvačnosti)** Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou diagonální matice. Potom

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}).$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$. Označme $h = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$ hodnost obou matic a k, l počty kladných diagonálních prvků v maticích $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$.

Potom $\sigma(\mathbf{A}) = (k, h-k, n-h)$ a $\sigma(\mathbf{B}) = (l, h-l, n-h)$, takže stačí dokázat rovnost $k = l$. Protože pořadí prvků na diagonále můžeme přehazovat při zachování vztahu kongruence, můžeme si dovolit předpokládat, že naše matice mají tvar

$$\mathbf{A}=\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_k, -a_{k+1}, \ldots, -a_h, 0, \ldots, 0),$$
$$\mathbf{B}=\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_l, -b_{l+1}, \ldots, -b_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $a_i > 0$, $b_i > 0$ pro $i \leq h$.

Protože $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$. Její sloupce tvoří bázi $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom $\mathbf{A}$ je maticí kvadratické formy

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

na $\mathbb{R}^n$ v bázi ε, zatímco $\mathbf{B}$ je její matice v bázi β.

Označme

$$S = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k], \qquad T = [\mathbf{v}_{l+1}, \ldots, \mathbf{v}_n]$$

lineární podprostory v $\mathbb{R}^n$. Pro každý nenulový vektor $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k \in S$ platí

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 > 0.$$

Podobně, pro každý vektor $\mathbf{y} = y_{l+1}\mathbf{v}_{l+1} + \ldots + y_n\mathbf{v}_n \in T$ platí

$$q(\mathbf{y}) = (\mathbf{y})_\beta^T \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{y})_\beta = -b_{l+1}y_{l+1}^2 - \ldots - b_hy_h^2 \leq 0.$$

Z toho vyplývá, že $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, tedy

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T = k + (n-l).$$

Protože $S+T \subseteq \mathbb{R}^n$, zřejmě $\dim(S+T) \leq n$.

Z nerovnosti $k + n - l \leq n$ okamžitě vyplývá $k \leq l$. Ze symetrie vztahu kongruence dostáváme též $l \leq k$. ■

Dokázaná věta umožňuje korektně rozšířit definici signatury z diagonálních matic na všechny symetrické matice, a rovněž na symetrické bilineární a kvadratické formy.

Signaturou symetrické matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, píšeme $\sigma(\mathbf{A})$, rozumíme signaturu každé s ní kongruentní diagonální matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Signaturou symetrické bilineární formy $F : V^2 \to \mathbb{R}$ na konečně rozměrném reálném vektorovém prostoru V, označení $\sigma(F)$, rozumíme signaturu její matice vzhledem k libovolné bázi v V.

Signaturou kvadratické formy $q V \to \mathbb{R}$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nad $\mathbb{R}$, označenie $\sigma(q)$, rozumíme signaturu její polární formy.

Pro symetrickou bilineární i pro kvadratickou formu sa příslušná signatura rovná signatuře nějaké její diagonální matice. Sylvestrův zákon setrvačnosti spolu s vetou 11.17 nám zaručují, že libovolné dvě diagonální matice zodpovídající dané formě vzhledem k různým bazí, ve kterých má tato forma diagonální matici, mají stejnou signaturu.

Každou reálnou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici. Tu zase můžeme změnou pořadí prvků na diagonále upravit na s ní kongruentní matici tvaru

$$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_k, -d_{k+1}, \ldots, -d_{k+l}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-krát}}),$$

kde $\sigma(\mathbf{A}) = (k, l, m)$ a $d_i > 0$ pro $i \leq k + l$.

Pokud pro každé $i \leq k + l$ vynásobíme i-tý sloupec i řádek skalárem $1/\sqrt{d_i}$, vyjde nám matice v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(\mathbf{I}_k, -\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}).$$

Spojením této úvahy se Sylvestrovým zákonem setrvačnosti dostaneme

Věta 2. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou libovolné symetrické matice. Potom

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \iff \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}).$$

Důsledek 3. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ konečné dimenze n. Potom

(a) každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to \mathbb{R}$ má ve vhodné bázi α prostoru V blokově diagonální matici tvaru

$$[F]_\alpha = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_k, -\mathbf{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}),$$

kde $\sigma(F) = (k, l, m)$;

(b) každá kvadratická forma $q : V \to \mathbb{R}$ má ve vhodné bázi α prostoru V diagonální tvar

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2,$$

kde $\sigma(q) = (k, l, n-k-l)$ a $(\mathbf{x})_\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Každou symetrickou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ i $\mathbb{Q}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální matici

$$\mathbf{A} \equiv \mathsf{diag}(d_1, \ldots, d_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $h = h(\mathbf{A})$ a $d_j \neq 0$ pro $j \leq h$.

V komplexním případě si každý z prvků d_j můžeme vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$d_j = r_j(\cos \alpha_j + \mathrm{i} \sin \alpha_j),$$

kde $r_j = |d_j| > 0$ a $0 \leq \alpha_j < 2\pi$.

Pokud pro každé $j \leq h$ vynásobíme j-tý sloupec i řádek skalárem

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{r_j}}(\cos\frac{\alpha_j}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_j}{2}),$$

pro který platí $c_j^2 d_j = 1$, dostaneme

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(\mathbf{I}_h, \mathbf{0}_{m,m}),$$

kde $m = n-h$. Z toho vidíme, že nad číselným tělesem $\mathbb{C}$ se nic podobné rozdělení nenulových prvkov na kladné a záporné nekoná – všechny nenulové prvky na diagonále jsou rovnocenné a můžeme je nahradit jedničkou.

Jediným invariantem, který jednoznačně určuje kongruenci symetrických matic i kanonický tvar matic symetrických bilineárních i kvadratických forem nad $\mathbb{C}$, je jejich hodnosť, která tak plně přebírá úlohu signatury v reálném případě.

Tvrzení 4. (a) Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou symetrické matice. Potom $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

(b) Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, a $F : V^2 \to \mathbb{C}$ je symetrická bilineární forma. Potom F má vzhledem k nějaké bázi α prostoru V matici v blokově diagonálním tvaru $[F]_\alpha = \mathrm{diag}(\mathbf{I}_h, \mathbf{0}_{m,m})$, kde $h = h(F)$ a $m = \mathrm{dim} V - h$.

Situace nad $\mathbb{C}$ je podstatně jednodušší než nad $\mathbb{R}$ a dokázali jsme ji zcela popsat.

Nad $\mathbb{Q}$ si tak lehko poradit nedovedeme. Základní problém tkví v tom, že ne všechny kladné racionální čísla mají racionální druhé odmocniny.

Např. pro matici rozměru 1×1 máme např. $(2) \not\equiv (1)$ v důsledku iracionality čísla $\sqrt{2}$.

Pro rozměr 2×2 máme např.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.2. Definitnost

Nechť V je vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$.

Kvadratická forma $q : V \to \mathbb{R}$ se nazývá

(a) *kladně (pozitivně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) > 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(b) *kladně (pozitivně) semidefinitní*, pokud $q(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(c) *záporně (negativně) definitní*, pokud $q(\mathbf{x}) < 0$ pro každé $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in V$;

(d) *záporně (negativně) semidefinitní*, jestliže $q(\mathbf{x}) \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;

(e) *indefinitní*, pokud existují $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ tak, že $q(\mathbf{x}) < 0 < q(\mathbf{y})$.

Stejnou klasifikaci zavádíme i pro symetrické bilineární formy $F : V^2 \to \mathbb{R}$ – F má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když jí indukovaná kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, má tuto vlastnost. Podobně, symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má příslušnou vlastnost definitnosti právě tehdy, když tuto vlastnost má kvadratická forma $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Evidentně platí: (a) $\Rightarrow$ (b), (c) $\Rightarrow$ (d), ale každá z podmínek (a), (c), (e) vylučuje zbývající dvě. Dokonca (e) vylučuje každou z podmínek (b), (d). Podmínky (b), (d) se vzájemně nevylučují, ale jediná kvadratická forma, která je zároveň kladně i záporně semidefinitní, je forma identicky rovná nule na V.

V dimenzi $n = 1$ je to však jediná (kladně nebo záporně) semidefinitní forma. V dimenzi $n = 1$ neexistují žádné indefinitní formy.

Nasledující tvrzení poskytuje úplný popis definitnosti i regularity kvadratických forem (a zároveň i symetrických bilineárních forem a symetrických matic) v jazyce jejich signatury.

Tvrzení 5. Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem $\mathbb{R}$ a $q : V \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma se signaturou $\sigma(q) = (s_+, s_-, s_0)$. Potom

(a) q je kladně definitní právě tehdy, když platí $\sigma(q) = (n, 0, 0)$;

(b) q je kladně semidefinitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (h(q), 0, n - h(q))$;

(c) q je záporně definitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (0, n, 0)$;

(d) q je záporně semidefinitní právě tehdy, když $\sigma(q) = (0, h(q), n - h(q))$;

(e) q je indefinitní právě tehdy, když $s_+ \geq 1$ a $s_- \geq 1$;

(f) q je regulární právě tehdy, když $s_0 = 0$.

Důkaz. Plyne bezprostředně při vyjádření matice kvadratické formy pomocí diagonální matice mající na diagonále pouze $+1, -1, 0$. ■

Důsledek 6. Symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je kladně definitní právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}.$$

Tvrzení 5 nám spolu s algoritmem z důkazu věty 11.17 (případně Lagrangeovou metodou) dává přímý návod na zjištění charakteru definitnosti nějakej formy či matice. Tak například kvadratická forma z příkladu v kapitole 11 má signaturu $(2, 2, 0)$, je tedy indefinitní.

Někdy však může být užitečné, jestliže dokážeme určit charakter definitnosti nějaké symetrické matice (a tím pádem i jí určené kvadratické či bilineární formy) přímo, t. j. bez její předcházející úpravy na s ní kongruentní diagonální tvar.

Zavedeme jistou modifikaci úprav typu (1) z důkazu věty 11.17 – nazvěme je úpravami typu

(1^+) Nechť $i \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupně pro každé $j \leq n$ takové, že $j > i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, připočteme k j-tému sloupci matice $(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})$-násobek i-tého sloupce a v takto získané matici připočteme $(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}})$-násobek i-tého řádku k j-tému řádku. Tedy pomocí diagonálního prvku $a_{ii} \neq 0$ vynulujeme všechny nenulové prvky i-tého řádku i sloupce, které leží *napravo* resp. *dole* od prvku a_{ii}.

Matice přechodu, která vznikne provedením ESO, odpovídajících nějakým úpravám typu (1^+) na jednotkové matici, je vždy horní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále. Součin dvou matic takéhoto tvaru má též takýto tvar.

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ matice nad libovolným číselným tělesem K a $1 \le k \le n$, tak pro potřeby zbývající části tohoto paragrafu bude $\mathbf{A}_k$ označovat matici tvořenou levým horním rohem rozměru $k \times k$ matice $\mathbf{A}$. Tedy

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}), \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\ldots, \qquad \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

Věta 7. (**Jacobi**) Nechť K je libovolné číselné těleso a $\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je symetrická matice hodnosti h. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) matice $\mathbf{A}_h$ je regulární a matici $\mathbf{A}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální tvar výlučně pomocí úprav typu (1^+);

(ii) $|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$, a platí

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, 0, \ldots, 0\right);$$

(iii) $|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$;

(iv) $|\mathbf{A}_k| \neq 0$ pro každé $1 \leq k \leq h$ a matici $\mathbf{A}$ můžeme upravit na s ní kongruentní diagonální tvar

$$\text{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, 0, \ldots, 0\right)$$

výlučně pomocí úprav typu (1^+).

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nechť platí (i). Pak existuje horní trojúhelníková matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ s jedničkami na diagonále tak, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ je v diagonálním tvaru. Zřejmě i každá z matic $\mathbf{P}_k$, $1 \leq k \leq n$, tvořená levým horním rohem rozměru $k \times k$ matice $\mathbf{P}$, je v takovémto tvaru.

Označme $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Potom pro každé $k \leq n$ platí (domácí cvičení)

$$\mathbf{B}_k = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_k)$$

$$= \mathbf{P}_k^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{P}_k.$$

Determinant každé z matic $\mathbf{P}_k$ je součin jejích diagonálních prvků, tj. $|\mathbf{P}_k| = 1$. Proto

$$|\mathbf{B}_k| = b_1 \ldots b_k = |\mathbf{A}_k|$$

pro každé $k \leq n$. Protože matice $\mathbf{A}_h$ je regulární, platí

$$|\mathbf{A}_h| = |\mathbf{B}_h| = b_1 \ldots b_h \neq 0,$$

tedy $b_k \neq 0$ pro všechny $k \leq h$.

Z jednotlivých rovností $|\mathbf{A}_1| = b_1$, $|\mathbf{A}_2| = b_1 b_2$, ..., $|\mathbf{A}_h| = b_1 b_2 \dots b_h$ už přímo vyplývá nenulovost všech minorů $|\mathbf{A}_k|$ pro $k \leq h$.

Zároveň platí rovnosti $b_1 = |\mathbf{A}_1|$, $b_2 = |\mathbf{A}_2|/|\mathbf{A}_1|$, ..., $b_h = |\mathbf{A}_h|/|\mathbf{A}_{h-1}|$. Protože $h(\mathbf{B}) = h(\mathbf{A}) = h$, pro $h \leq k \leq n$ platí $b_k = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) platí triviálně.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Nechť platí (iii). Dokážeme, že matici $\mathbf{A}$ můžeme upravit na diagonální tvar

$$\mathbf{A} \equiv \text{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, 0, \dots, 0\right)$$

jen pomocí úprav typu (1^+).

Protože $a_{11} = |\mathbf{A}_1| \neq 0$, můžeme pomocí a_{11} vynulovat všechny ostatní prvky prvního řádku i sloupce matice $\mathbf{A}$. Protože leží napravo resp. dole od a_{11}, jde o úpravu typu (1^+).

Dostaneme tak matici v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \text{diag}(a_{11}, \mathbf{C}^{(1)}),$$

kde $\mathbf{C}^{(1)} = (c_{ij}^{(1)})$ je matice rozměru $(n-1) \times (n-1)$ nad K. Vzhledem na charakter prováděných sloupcových a řádkových úprav platí

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & c_{11}^{(1)} \end{pmatrix},$$

a rovněž $|\mathbf{A}_2| = a_{11}c_{11}^{(1)}$, a tedy

$$c_{11}^{(1)} = \frac{|\mathbf{A}_2|}{a_{11}} = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|} \neq 0.$$

Pomocí prvku $c_{11}^{(1)} \neq 0$ můžeme nyní vynulovat všechny ostatní prvky prvního řádku i sloupce matice $\mathbf{C}^{(1)}$. Opět jde o úpravu typu (1^+) na matici $\mathrm{diag}(a_{11}, \mathbf{C}^{(1)})$.

Dostaneme tak matici v blokově diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}(a_{11}, \mathbf{C}^{(1)}) \equiv \mathrm{diag}(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \mathbf{C}^{(2)}),$$

kde $\mathbf{C}^{(2)} = (c_{ij}^{(2)}) \in K^{(n-2)\times(n-2)}$.

Stejnou úvahou jako v předešlém případě dospějeme k závěru, že

$$c_{11}^{(2)} = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}_2|} \neq 0.$$

Takto můžeme pokračovat tak dlouho, až dokud nedospějeme k blokově diagonálnímu tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \mathrm{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_h|}{|\mathbf{A}_{h-1}|}, \mathbf{C}^{(h)}\right),$$

kde $\mathbf{C}^{(h)} \in K^{(n-h)\times(n-h)}$. Vzhledem na to, že obě matice mají hodnost h, (pokud $h < n$) je matice $\mathbf{C}^{(h)}$ identicky nulová.

(iv) $\Rightarrow$ (i) je opět triviální.

Věta 8. (**Sylvestrovo kritérium**) Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická matica. Potom

(a) $\mathbf{A}$ je kladně definitní právě tehdy, když $|\mathbf{A}_k| > 0$ pre všechny $1 \le k \le n$;

(b) $\mathbf{A}$ je záporně definitní právě tehdy, když $(-1)^k|\mathbf{A}_k| > 0$ pre všechna $1 \le k \le n$.

Důkaz. (a) Nechť $\mathbf{A}$ je kladně definitní. Pak existuje regulární matice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$. Protože $|\mathbf{P}| \neq 0$, máme

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}^T| \cdot |\mathbf{P}| = |\mathbf{P}|^2 > 0.$$

Pro každé $1 \leq k \leq n$ označme $S_k = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k]$ vektorový podprostor v $\mathbb{R}^n$ generovaný prvními k vektory kanonické báze ε.

Dále definujme $q_k = q \restriction S_k$ zúžení kvadratické formy $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ na podprostor S_k.

Zřejmě každé q_k je kladně definitní kvadratická forma, která má v bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ podprostoru S_k matici $\mathbf{A}_k$. Tedy každá z matic $\mathbf{A}_k$, $1 \leq k \leq n$, je kladně definitní. Podle první části důkazu z toho vyplývá, že $|\mathbf{A}_k| > 0$.

Nechť naopak všechny minory $|\mathbf{A}_k|$, $1 \leq k \leq n$, jsou kladné. Potom $h(\mathbf{A}) = n$ a podle Jacobiho vety platí

$$\mathbf{A} \equiv \text{diag}\left(|\mathbf{A}_1|, \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}_1|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}_{n-1}|}\right).$$

Protože všechny diagonální prvky v poslední matici jsou kladné, $\mathbf{A}$ je kladně definitná.

(b) vyplývá z (a) na základě faktu, že $\mathbf{A}$ je záporně definitní právě tehdy, když $-\mathbf{A}$ je kladně definitní, a rovnosti $|-\mathbf{A}_k| = (-1)^k|\mathbf{A}_k|$ splněné pro všechny $k \leq n$. ■

12.3. Kvadriky v $\mathbb{R}^n$

Důležitým případem implicitně reprezentovatelných křivek jsou *kuželosečky*. Kuželosečku obdržíme jako průnik roviny s kuželem. Rozlišujeme tři základní typy: *elipsa, hyperbola a parabola*. V normálním tvaru mají následující reprezentaci:

elipsa:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,$
hyperbola:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$
parabola:	$y^2 = 2px.$

Obecně lze kuželové řezy popsat pomocí rovnic tvaru

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot x \cdot y + d \cdot x + e \cdot y + f = 0.$$

Koule je příklad *kvadriky*. Kvadriky jsou plochy v prostoru odpovídající kuželovým řezům v rovině. Získáme je jako nulové množiny rovností tvaru

$$
\begin{aligned}
a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot x \cdot y + e \cdot x \cdot z \\
+ f \cdot y \cdot z + g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z + j \qquad &= 0,
\end{aligned}
$$

tj. tyto se reprezentují pomocí kvadratické rovnosti, z čehož vzniklo jejich jméno.

Počet typů je mnohonásobně větší než pro kuželové řezy:

Kužel:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2 = 0$
Dvojdílný hyperboloid:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2 = 1$
Jednodílný hyperboloid:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2 = 1$
Elipsoid:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2 = 1$
Eliptická válcová plocha:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
Eliptický paraboloid:	$x^2/a^2 + y^2/b^2 + 2cz = 0$
Hyperbolický paraboloid:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 + 2cz = 0$
Hyperbolická válcová plocha:	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
Parabolická válcová plocha:	$x^2/a^2 - 2by = 0$

Kvadriky v $\mathbb{R}^n$ jsou množiny

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b_i x_i + c = 0\}$$

tj. množiny řešení rovnice

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{x} + \mathbf{c} = 0,$$

kde $\mathbf{A}$ je symetrická matice typu $n \times n$, $\mathbf{b}$ je vektor typu n a c je reálný skalár.

Toto vyjádření je v afinních souřadnicích tj. je dán počátek P a vektory $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, . . . , $\mathbf{u}_n$ tak, že bod $X = P + \sum_i x_i \mathbf{u}_i$.

Hledáme nové afinní souřadnice, v nichž má kvadrika co nejjednodušší vyjádření.

Afinní záměna souřadnic je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{S}$ je regulární matice a $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \mathbf{c}^T$ je posunutí počátku souřadnic.

Matici $\mathbf{A}$ lze lineární záměno souřadnic převést na diagonální tvar s $+1, -1, 0$.

Mohou pak nastat následující případy:

(1) Nechť hodnost r matice $\mathbf{A}$ je rovna n. Potom můžeme formu o signatuře $(s_+, s_-, 0)$ převést na tvar

$$
\begin{aligned}
&y_1^2 + \ldots + y_{s_+}^2 - y_{s_++1}^2 - \ldots - y_n^2 \\
&\quad + b_1' y_1 + \ldots + b_n' y_n + c' \\
&= (y_1 + \tfrac{b_1'}{2})^2 + \ldots + (y_{s_+} + \tfrac{b_{s_+}'}{2})^2 \\
&\quad -(y_{s_++1} - \frac{b_{s_++1}'}{2})^2 - \ldots - (y_n - \tfrac{b_n'}{2})^2 + d \\
&= z_1^2 + \ldots + z_{s_+}^2 - z_{s_++1}^2 - \ldots - z_n^2 + d = 0.
\end{aligned}
$$

(2) Nechť hodnost r matice $\mathbf{A}$ je rovna $r < n$. Potom můžeme formu o signatuře (s_+, s_-, s_0) převést na tvar

$$y_1^2 + \ldots + y_{s_+}^2 - y_{s_++1}^2 - \ldots - y_r^2$$
$$+ b'_{r+1} y_{r+1} + \ldots + b'_n y_n + c' = 0$$

Rozdělme případ (2) na následující části:

(2a) Nechť $b'_k \neq 0$ pro jisté $r < k \leq n$. Potom můžeme formu převést na tvar

$$z_1^2 + \ldots + z_{s_+}^2 - z_{s_++1}^2 - \ldots - z_r^2 + z_{r+1} = 0$$

(2b) Nechť $b'_k = 0$ pro všechna $r < k \leq n$ a $c' \neq 0$. Potom můžeme formu převést na tvar

$$z_1^2 + \ldots + z_{s_+}^2 - z_{s_++1}^2 - \ldots - z_r^2 \pm 1 = 0$$

(2c) Nechť $b'_k = 0$ pro všechna $r < k \leq n$ a $c' = 0$. Potom můžeme formu převést na tvar

$$z_1^2 + \ldots + z_{s_+}^2 - z_{s_++1}^2 - \ldots - z_r^2 = 0$$

Máme pak

kružnice, elipsa:	$x^2 + y^2 = 1,$
prázdná množina:	$x^2 + y^2 = -1,$
bod:	$x^2 + y^2 = 0,$
hyperbola:	$x^2 - y^2 = 1,$
dvě různoběžné přímky:	$x^2 - y^2 = 0,$
parabola:	$x^2 + y = 0,$
dvě rovnoběžné přímky:	$x^2 = 1,$
jedna přímka:	$x^2 = 0.$