11. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Nejjednodušším netriviálním příkladem multilineárních zobrazení jsou tzv. *bilineární zobrazení*. Z nich se budeme soustředit hlavně na *bilineární formy*, t. j. na bilineární zobrazení s hodnotami v příslušném číselném tělese. Od bilineárních forem je už jen krok k tzv. *kvadratickým formám*.

Tímto krokem vystoupíme ze světa objektů lineárních (t. j. „prvého stupně") a dostaneme sa do světa objektů kvadratických (t. j. „druhého stupně").

V celé kapitole K označuje nějaké pevné ale jinak libovolné číselné těleso. Vektorovým prostorem budeme rozumět vektorový prostor nad K.

11.1. Bilineární zobrazení a bilineární formy

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad číselným tělesem K. Říkáme, že $F : U \times V \to W$ je *bilineární zobrazení*, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$ a $c_1, c_2 \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) &= c_1F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + c_2F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \\ F(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= c_1F(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + c_2F(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Zobrazení $F : U \times V \to W$ je bilineární právě tehdy, když pro libovolné pevné $\mathbf{x} \in U$ je přiřazením $\mathbf{y} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definované lineární zobrazení $V \to W$ a pro libovolné pevné $\mathbf{y} \in V$ je přiřazením $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definované lineární zobrazení $U \to W$.

Příklad 1. (a) Pro pevné m, n, p je předpisem $F(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dané bilineární zobrazení $F : K^{m \times n} \times K^{n \times p} \to K^{m \times p}$. Tedy násobení matic je bilineární zobrazení mezi vektorovými prostory matic příslušných rozměrů.

(b) Pro libovolné vektorové prostory U, V je předpisem $F(\varphi, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ definované bilineární zobrazení $F : \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

To znamená, že na dosazení argumentu do funkce se můžeme dívat jako na bilineární zobrazení na příslušných vektorových prostorech.

Nejdůležitějším případem takovéhoto bilineárního zobrazení je tzv. *dualita* $V^* \times V \to K$.

(c) Pro libovolné vektorové prostory U, V, W je předpisem $F(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ definované bilineární zobrazení $F : \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \times \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \to \mathcal{L}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$.

Tedy kompozici můžeme chápat jako bilineární zobrazení na uvedených vektorových priestoroch lineárních zobrazení.

Bilineární formou na vektorových prostorech U, V rozumíme libovolné bilineární zobrazení $F : U \times V \to K$.

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m})$ resp. $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$. Potom pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ je předpisem

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_\beta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $(\mathbf{x})_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $(\mathbf{y})_\beta = (y_1, \ldots, y_n)^T$ jsou souřadnice vektorů $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ v příslušných bazích, definovaná bilineární forma $F : U \times V \to K$. Obráceně, každá bilineární forma na vektorových prostorech U, V má uvedený tvar pro jednoznačně určenou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Maticí bilineární formy $F : U \times V \to K$ vzhledem na báze α, β nazýváme matici

$$[F]_{\alpha,\beta} = (F(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)) \in K^{m \times n},$$

která je složena z hodnot formy F na dvojicích vektorů bazí α, β.

Tvrzení 2. Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory s bázemi α, resp. β a $F : U \times V \to K$ je bilineární forma. Potom pro všechna $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot [F]_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{y})_\beta$$

a $\mathbf{A} = [F]_{\alpha,\beta}$ je jediná matice s touto vlastností.

Důkaz. Nechť $(\mathbf{x})_\alpha = (x_1, \ldots, x_m)^T$, $(\mathbf{y})_\beta = (y_1, \ldots, y_n)^T$ jsou souřadnice vektorů $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ v příslušných bazích $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_m})$, $\beta = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$.

S použitím bilinearity F dostáváme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F(x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_m\mathbf{u}_m,\ y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j F(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) \\ &= (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot [F]_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{y})_\beta. \end{aligned}$$

Ukážeme, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ platí $(\forall\, \mathbf{x} \in U)(\forall\, \mathbf{y} \in V)$

$$\big(F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_\beta\big) \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = [F]_{\alpha,\beta}.$$

Máme

$$F(\mathbf{u}_i,\mathbf{v}_j) = (u_i)_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{v}_j)_\beta = \mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

■

Speciálně každá bilineární forma

$$F : K^m \times K^n \to K$$

na (sloupcových) vektorových prostorech K^m, K^n má tvar

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

kde $\mathbf{A} = [F]_{\varepsilon^{(\mathbf{m})},\varepsilon^{(\mathbf{n})}}$ je matice formy F vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon^{(\mathbf{m})}$, $\varepsilon^{(\mathbf{n})}$.

Tvrzení 3. Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové priestory nad číselným tělesem K, $\alpha_{\mathbf{1}}$, $\beta_{\mathbf{1}}$ jsou dvě báze prostoru V_1, $\alpha_{\mathbf{2}}$, $\beta_{\mathbf{2}}$ jsou dvě báze priestoru V_2 a $F : V_1 \times V_2 \to K$ je bilineární forma. Potom

$$[F]_{\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}}} = \left(\mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}}\right)^T \cdot [F]_{\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}}} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{2}},\beta_{\mathbf{2}}}.$$

Důkaz. Označme $\mathbf{A} = [F]_{\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}}}$, $\mathbf{B} = [F]_{\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}}}$ matice formy F v příslušných bazích. Pro libovolné vektory $\mathbf{x} \in V_1$, $\mathbf{y} \in V_2$ platí

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x})^T_{\beta_{\mathbf{1}}} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{y})_{\beta_{\mathbf{2}}} &= F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{x})^T_{\alpha_{\mathbf{1}}} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_{\alpha_{\mathbf{2}}} \\
&= \left(\mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}} \cdot (\mathbf{x})_{\beta_{\mathbf{1}}}\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{2}},\beta_{\mathbf{2}}} \cdot (\mathbf{y})_{\beta_{\mathbf{2}}}\right) \\
&= (\mathbf{x})^T_{\beta_{\mathbf{1}}} \cdot \left(\left(\mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{1}}}\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_{\mathbf{2}},\beta_{\mathbf{2}}}\right) \cdot (\mathbf{y})_{\beta_{\mathbf{2}}}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Příklad 4. Nechť $F : K^m \times K^n \to K$ je bilineární forma a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m, resp. K^n. Označme $\mathbf{A} = [F]_{\alpha,\beta}$, $\mathbf{M} = [F]_{\varepsilon^{(\mathbf{m})},\varepsilon^{(\mathbf{n})}}$ matice formy F vzhledem na báze α, β, resp. vzhledem na kanonické báze $\varepsilon^{(\mathbf{m})}$, $\varepsilon^{(\mathbf{n})}$. Pak platí

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left(\mathbf{P}_{\varepsilon^{(\mathbf{m})},\alpha}\right)^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(\mathbf{n})},\beta} \\ &= \alpha^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \left(\mathbf{P}_{\alpha,\varepsilon^{(\mathbf{m})}}\right)^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\varepsilon^{(\mathbf{n})}} \\ &= \left(\alpha^{-\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-\mathbf{1}}.\end{aligned}$$

Tvrzení 5. Nechť U je m-rozměrný a V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice té stejné bilineární formy $F : U \times V \to K$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V;

(ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m\times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n\times n}$ takové, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;

(iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.

Důkaz. Zřejmé. ■

Na základě uvedeného tvrzení můžeme korektně definovat *hodnost* $h(F)$ *bilineární formy* F na konečně rozměrných vektorových prostorech jako hodnost jejich matice vzhledem k libovolné dvojice bazí.

Důsledek 6. Pro každou bilineární formu $F : U \times V \to K$ na konečně rozměrných vektorových prostorech nad číselným tělesem K můžeme zvolit bázi α prostoru U a bázi β prostoru V tak, že F má vzhledem k bazím α, β matici v blokovém tvaru

$$[F]_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h,n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h,h} & \mathbf{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $m = \mathrm{dim}U$, $n = \mathrm{dim}V$ a $h = h(F)$.

Je-li $F : U \times V \to K$ libovolná bilineární forma, tak pro každé $\mathbf{y} \in V$ je předpisem $\varphi\mathbf{y}(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definovaný lineární funkcionál $\varphi\mathbf{y} : U \to K$, t. j. prvek duálu $U^* = \mathcal{L}(U, K)$ vektorového prostoru U.

Položíme-li $F^*(\mathbf{y}) = \varphi\mathbf{y}$, je tím definované zobrazení $F^* : V \to U^*$.

Budeme se zabývat otázkou, pro jaké F má *každý* lineární funkcionál $\varphi \in U^*$ tvar $\varphi = F^*(\mathbf{y})$ pro nějaké, případně pro jediné $\mathbf{y} \in V$.

Věta 7. (a) Nechť U, V jsou vektorové prostory a $F : U \times V \to K$ je bilineární forma. Potom $F^* : V \to U^*$ je lineární zobrazení.

(b) Jsou-li U, V konečně rozměrné, pak $h(F^*) = h(F)$. V důsledku toho je F^* injektivní právě tehdy, když $h(F) = \dim V$, a F^* je surjektivní právě tehdy, když $h(F) = \dim U$.

Důsledek 8. Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze. Potom pro každou bilineární formu $F : U \times V \to K$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $F^* : V \to U^*$ je lineární izomorfismus;

(ii) $h(F) = \dim V$;

(iii) pro libovolné báze α, β prostorů U, resp. V je $[F]_{\alpha,\beta}$ regulární matice.

Důkaz. (a) - přímým výpočtem. (b) Položme dim$V = n$, zvolme nějaké báze α, β prostorů U, resp. V a označme $\mathbf{A} = [F]_{\alpha,\beta}$ matici formy F vzhledem k nim. Potom

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}F^* &= \{\mathbf{y} \in V;\ (\forall\, \mathbf{x} \in U)(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \\ &= \{\mathbf{y} \in V;\ (\forall\, \mathbf{x} \in U)((\mathbf{x})_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_\beta = 0\} \\ &= \{\mathbf{y} \in V;\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{y})_\beta = \mathbf{0}\},\end{aligned}$$

Protože $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{y})_\beta$ je lineární izomorfizmus $V \to K^n$, je nutně Ker$F^* \cong \mathcal{R}(\mathbf{A})$ a tedy

$$\mathrm{dimKer}F^* = \mathrm{dim}\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}) = n - h(F).$$

Zároveň

$$h(F^*) = \mathrm{dimIm}F^* = n - \mathrm{dimKer}F^* = h(F).$$

F^* je prosté (surjektivní) právě tehdy, když dimKer$F^* = 0$ (dimIm$F^* =$ dim$U$) tj. $h(F) = n =$ dim$V$ ($h(F) =$ dim$U$).

Nechť U, V jsou konečně rozměrné vektorové prostory stejné dimenze. Bilineární forma $F : U \times V \to K$ sa nazývá *regulární*, pokud splňuje některou (a tedy všechny) z podmínek posledního důsledku; v opačném případě se F nazývá *singulární*.

Můžeme pak zvolit bázi α prostoru U a bázi β prostoru V tak, že F má vzhledem k bazím α, β matici

$$[F]_{\alpha,\beta} = \mathbf{I}_n,$$

kde $\dim U = \dim V = n$.

11.2. Symetrické bilineární formy a kvadratické formy

V této části se budeme výlučně věnovat bilineárními formami, ve kterých první i druhá proměnná probíhá nad tím stejným vektorovým prostorem V, t. j. bilineárními formami tvaru $F : V \times V \to K$. Budeme je nazývat *bilineárními formami na vektorovém prostoru* V.

Bilineární forma $F : V^2 \to K$ se nazývá *symetrická*, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Bilineární forma $F : V^2 \to K$ sa nazývá *antisymetrická*, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -F(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Tvrzení 9. Nechť F je bilineární forma na vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K. Pak F můžeme rozložit na součet

$$F = F_0 + F_1$$

pro jednoznačně určené bilineární formy F_0, F_1 na V, přičemž F_0 je symetrická a F_1 je antisymetrická.

Důkaz. Pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ položme

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x})), \\ F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{x})). \end{aligned}$$

Lze snadno ověřit, že F_0 i F_1 jsou bilineární formy na V, F_0 je symetrická, F_1 je antisymetrická a pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Zbývá ověřit jednoznačnost F_0 a F_1. Nechť $F = G_0 + G_1$ je druhý takovýto rozklad. Pak ze symetrie F_0, G_0 a z antisymetrie F_1, G_1 plyne

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) - F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= F_0(\mathbf{y},\mathbf{x}) + F_1(\mathbf{y},\mathbf{x}) \\ &= G_0(\mathbf{y},\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{y},\mathbf{x}) \\ &= G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) - G_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{aligned}$$

pro všechna $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$.

Sečtením resp. odečtením rovností

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + G_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), \\ F_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) - F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) - G_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{aligned}$$

obdržíme požadované vztahy $F_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$ a $F_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$. ■

Je-li F bilineární forma na konečně rozměrném vektorovém prostoru V s bází $\alpha = (\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n})$, tak pod *maticí formy* F vzhledem na tuto bázi budeme rozumět její matici vzhledem na dvojici bazí α, α; značíme ji $[F]_\alpha$. Tedy

$$[F]_\alpha = [F]_{\alpha,\alpha} = (F(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))_{n\times n}.$$

Připomeňme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ sa nazývá *symetrická*, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = a_{ji}$; podobne, $\mathbf{A}$ sa nazývá *antisymetrická*, pokud $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, t. j. pokud pro všechna $i, j \leq n$ platí $a_{ij} = -a_{ji}$.

Tvrzení 10. Nechť α je libovolná báze konečně rozměrného vektorového prostoru V a $F : V^2 \to K$ je bilineární forma na V. Potom

(a) F je symetrická právě tehdy, když její matice $[F]_\alpha$ je symetrická;

(b) F je antisymetrická právě tehdy, když její matice $[F]_\alpha$ je antisymetrická.

Násobení v číselném tělese můžeme chápat jako bilineární formu $F : K^2 \to K$, kde $F(a,b) = ab$ pro $a, b \in K$. Ztotožněním první a druhé proměnné dostáváme zobrazení $q : K \to K$, kde $q(a) = F(a,a) = a^2$, t. j. „a-kvadrát“.

Zevšeobecněním tohoto postupu dospějeme k pojmu kvadratické formy.

Zobrazení $q : V \to K$ vektorového prostoru V do číselného tělesu K sa nazývá *kvadratická forma* na V, pokud existuje bilineární forma $F : V^2 \to K$ taková, že pro všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Říkáme, že bilineární forma F *indukuje* kvadratickou formu q.

Je-li $F : V^2 \to K$ nějaká bilineární forma a $G : V^2 \to K$ je libovolná antisymetrická bilineární forma, tak $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, neboť nutně $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Zejména

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Polární formou kvadratické formy $q : V \to K$ nazýváme *symetrickou* bilineární formu $F : V^2 \to K$, která indukuje formu q.

Tvrzení 11. Nechť q je kvadratická forma na vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K. Potom existuje jediná symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ tak, že

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Důkaz. Pokud F je libovolná bilineární forma na V, která indukuje q, pak hledaná polární forma k q je daná vztahem

$$F_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x})).$$

■

Tvrzení 12. Nechť $q : V \to K$ je kvadratická forma a $F : V^2 \to K$ je její polární forma. Potom pro libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{2}(q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \\ &= \tfrac{1}{4}(q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \end{aligned}$$

Důkaz. Přímým výpočtem. ■

Tyto rovnosti jsou jednoduchým zevšeobecněním známých vzorců

$$\begin{aligned} ab &= \tfrac{1}{2}((a+b)^2 - a^2 - b^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a-b)^2) \\ &= \tfrac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2) \end{aligned}$$

platných pro libovolné $a, b \in K$.

Maticí kvadratické formy $q : V \to K$ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V nad číselným tělesem vzhledem na bázi α nazýváme matici její polární formy vzhledem na tuto bázi a značíme ji $[q]_\alpha$. Matice $[q]_\alpha$ je tímto požadavkem jednoznačně určená a je to vždy symetrická matice.

Hodností kvadratické formy q potom nazýváme hodnost její matice vzhledem na jakoukoliv bázi a značíme ji $h(q)$. Zřejmě hodnost $h(q)$ nezávisí od volby báze a rovná sa hodnosti $h(F)$ příslušné polární formy. Kvadratická forma sa nazývá *regulární*, resp. *singulární*, pokud má příslušnou vlastnost její polární forma.

11.3. Diagonalizace kvadratických a symetrických bilineárních forem

Je-li $F : V^2 \to K$ je libovolná bilineární forma na konečně rozměrném vektorovém priestoru V a $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ je její matice vzhledem k nějaké bázi α prostoru V, tak pro indukovanou kvadratickou formu $q : V \to K$ a všechna $\mathbf{x} \in V$ platí

$$q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x})_\alpha^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $(\mathbf{x})_\alpha = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jsou příslušné souřadnice.

Pokud F je navíc symetrická, t. j. pokud $\mathbf{A}$ je přímo matice formy q v bázi α, tak uvedený výraz můžeme dále upravit na tvar

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j.$$

Volbou vhodné báze, tj. „zavedením nových súradníc", se můžeme zbavit všech sčítanců $a_{ij}x_i x_j$ obsahujících smíšené členy a upravit tak celý výraz na *diagonální tvar*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2.$$

Příslušný výpočet můžeme uskutečnit pomocí tzv. *Lagrangeovej metódy*, která používa dva typy úprav: jednak metodu *doplnění na čtverec*, známou ze střední školy, jednak substituci

$$x_i x_j = \frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 - \frac{1}{4}(x_i - x_j)^2,$$

kterou použijeme v případě, když pro $i \neq j$ je $a_{ij} \neq 0$, ale $a_{ii} = a_{jj} = 0$.

Příklad 13. Kvadratická forma $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ je pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ daná předpisem

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) &= -2x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4 \\
&= \mathbf{x}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}\,.
\end{aligned}
$$

Všechny smíšené členy obsahující x_2 připojíme k členu $-2x_2^2$ a doplníme na čtverec:

$$q(\mathbf{x}) = -2(x_2^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - x_2x_3) - 3x_3x_4$$

$$= -2((x_2 - \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{1}{2}x_3)^2 - \tfrac{1}{16}x_1^2 - \tfrac{1}{4}x_3^2 - \tfrac{1}{4}x_1x_3) - 3x_3x_4$$

$$= -\tfrac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \tfrac{1}{8}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 + \tfrac{1}{2}x_1x_3 - 3x_3x_4\,.$$

Poté připojíme smíšené členy obsahující x_1 k členu $\frac{1}{8}x_1^2$ a doplníme na čtverec. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 \\
& + \frac{1}{8}(x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3) - 3x_3x_4 \\
= & -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 \\
& + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 - 3x_3x_4\,.
\end{aligned}
$$

Po použití uvedené substituce konečně máme

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) = & -\frac{1}{8}(x_1 - 4x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(x_1 + 2x_3)^2 \\
& - \frac{3}{4}(x_3 + x_4)^2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_4)^2.
\end{aligned}
$$

Pokud na $\mathbb{R}^4$ zavedeme nové souřadnice $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 2x_3 \\ y_3 &= x_3 + x_4 \\ y_4 &= x_3 - x_4, \end{aligned}$$

tak původní kvadratická forma q v nich získá diagonální tvar

$$q(\mathbf{x}) = q'(\mathbf{y}) = -\frac{1}{8}y_1^2 + \frac{1}{8}y_2^2 - \frac{3}{4}y_3^2 + \frac{3}{4}y_4^2 \,.$$

Matice

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zabezpečuje změnu souřadnic $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

Q je maticí přechodu z kanonické báze ε do takové báze α prostoru $\mathbb{R}^4$, v které pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ platí $(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$.

To znamená, že $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\alpha,\varepsilon} = \alpha^{\mathbf{-1}}$. Tedy $\alpha = \mathbf{Q}^{\mathbf{-1}}$, tj. hledaná báze α je tvořená sloupci matice

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14. Nejednoznačnost diagonálního tvaru a příslušné transformace souřadnic.

$$\begin{aligned} q(x,y) &= 10x^2 + 5y^2 - 2xy \\ &= (x+2y)^2 + (3x-y)^2 \\ &= \tfrac{1}{10}(10x-y)^2 + \tfrac{49}{10}y^2. \end{aligned}$$

Tvrzení 15. Nechť α, β jsou dvě báze konečně rozměrného vektorového prostoru V a $F : V^2 \to K$ je bilineární forma na V. Potom pro matice $\mathbf{A} = [F]_\alpha$, $\mathbf{B} = [F]_\beta$ formy F v těchto bazích platí

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_{\alpha,\beta})^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta}.$$

Čtvercové matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ se nazývají *kongruentní*, píšeme $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$ tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Zřejmě kongruentní matice mají stejnou hodnost. Dále pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\begin{gathered}\mathbf{A} \equiv \mathbf{A},\\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} \equiv \mathbf{A},\\ \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} \equiv \mathbf{C} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} \equiv \mathbf{C}.\end{gathered}$$

Jinak řečeno, vztah kongruence je *reflexivní*, *symetrický* a *tranzitivní*, t. j. je *ekvivalencí* na množině $K^{n\times n}$.

Dále platí implikace

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \;\&\; \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

t. j. pokud je jedna z dvou kongruentních matic symetrická, tak je symetrická i druhá z nich.

Věta 16. Nechť V je n-rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom pro libovolné symetrické matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice té stejné symetrické bilineární formy $F : V \times V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;

(ii) $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou matice té stejné kvadratické formy $q : V \to K$ vzhledem k nějakým dvěma bazím prostoru V;

(iii) $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n\times n}$ jsou kongruentní prostřednictvím regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n\times n}$. Matici $\mathbf{P}$ můžeme upravit na jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ pomocí elementárních *sloupcových* úprav, kterým zodpovídá rozklad matice $\mathbf{P}$ na součin elementárních matic

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k.$$

Potom

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\\ &= (\mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k)\\ &= \mathbf{E}_k^T \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_1^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_k\end{aligned}$$

Nechť $\mathbf{C} \in K^{n \times n}$ je libovolná matice a $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$ je elementární matice, která odpovídá nějaké ESO. Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ a $\mathbf{C}$ jsou kongruentní a navíc matice $\mathbf{E}^T$ odpovídá „stejné" ERO, jako byla ESO reprezentovaná maticí $\mathbf{E}$. Přesněji,

(a) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala výměně i-tého a j-tého sloupce, tak $\mathbf{E}^T$ odpovídá výměně i-tého a j-tého řádku;

(b) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala vynásobení i-tého sloupce nenulovým skalárem $c \in K$, tak $\mathbf{E}^T$ zodpovídá vynásobení i-tého řádku tímtéž stejným skalárem c;

(c) pokud $\mathbf{E}$ odpovídala připočtení c-násobku i-tého sloupce k j-tému sloupci, tak $\mathbf{E}^T$ zodpovídá přičtení c-násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

Matice $\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ tedy vznikne z matice $\mathbf{C}$ pomocí dvojice symetricky sdružených elementárních úprav – jedné ESO a jedné ERO. Navíc z asociativity násobení platí $\mathbf{E}^T \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{E}^T \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{E}$, je tedy jedno, v jakém pořadí obě úpravy provedeme.

Úprava symetrické matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ na s ní kongruentní diagonální matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ se realizuje v konečné posloupnosti kroků, z kterých každý sestáva z jedné ESO a s ní symetricky sdružené ERO. Posloupností příslušných ESO provedených na jednotkové matici $\mathbf{I}_n$ získáme též příslušnou matici přechodu $\mathbf{P}$ takovou, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$.

Celý postup můžeme stručně zachytit pomocí schématu

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\text{ERO}]{\text{ESO}} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{I}_n \xrightarrow{\text{ESO}} \mathbf{P}$$

Byla-li $\mathbf{A}$ matice nějaké symetrické bilineární formy, případně kvadratické formy v bázi α, tak $\mathbf{B}$ je maticí této formy v bázi $\beta = \alpha \cdot \mathbf{P}$ (t. j. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha\beta}$).

Pokud $\mathbf{A}$ je maticí příslušné formy na (sloupcovém) vektorovém prostoru K^n v kanonické bázi $\alpha = \varepsilon^{(\mathbf{n})}$, tak $\beta = \mathbf{P}$, t. j. vektory nové báze β jsou přímo sloupce matice $\mathbf{P}$.

Věta 17. Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor nad číselným tělesem K. Potom

(a) každá symetrická matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí;

(b) každá symetrická bilineární forma $F : V^2 \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici;

(c) každá kvadratická forma $q : V \to K$ má ve vhodné bázi prostoru V diagonální matici.

Důkaz. Stačí dokázat jen tvrzení (a), tvrzení (b), (c) jsou už jeho bezprostředními důsledky. Popíšeme algoritmus, který nám říká, jaké ESO a ERO je nutno postupně aplikovat na matici $\mathbf{A}$. V celém postupu sa používají dva typy úprav:

(1) Nechť $i \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupně pro každé $j \leq n$ takové, že $j \neq i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, připočteme k j-tému sloupci matice

$(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}})$-násobek

i-tého sloupce a v takto získané matici připočteme

$(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}})$-násobek

i-tého řádku k j-tému řádku.

Tedy pomocí diagonálního prvku $a_{ii} \neq 0$ vynulujeme všechny ostatní nenulové prvky i-tého řádku i sloupce.

(2) Nechť pro každé $i \leq n$ platí: je-li $a_{ii} \neq 0$, tak $a_{ij} = a_{ji} = 0$ pro každé $j \neq i$.

Nechť $k \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{kk} = 0$, ale k-tý řádek není identicky nulový.

Nechť dále $j \leq n$ je nejmenší index takový, že $a_{kj} = a_{jk} \neq 0$. Potom ke k-tému sloupci matice připočteme její j-tý sloupec a ke k-tému řádku takto získané matice připočteme její j-tý riadok.

Výsledná matice má na místě (k, k) prvek $a_{kj} + a_{jk} = 2a_{jk} \neq 0$.

Úpravy typu (1) mají přednost, t. j. vykonáváme je tak dlouho, jak je to jenom možné nebo dokud nezískáme diagonální matici.

V opačném případě aplikujeme jednu úpravu typu (2). Po ní nikdy nedostaneme diagonální matici a vždy můžeme aplikovat úpravu typu (1). Takto postupujeme, pokud to jen lze.

Pokud už nemůžeme aplikovat žádnou z úprav (1), (2), znamená to, že jsme dospěli k diagonální matici.

Protože po každé úpravě typu (1) přibudou alespoň dva nulové prvky mimo diagonálu a případné nenulové prvky mimo diagonálu, které přibyly v jejím důsledku nebo jedné úpravy typu (2), budou vynulované dalšími úpravami typu (1), celý postup nutně skončí po konečném počtu kroků.

Mimo úprav (1), (2) můžeme použít další dva typy úprav, bez kterých sa sice můžeme obejít, ale s jejich pomocí můžeme docílit „vhodnější“ tvar diagonální matice formy případně matice prechodu.

(3) Výměna i-tého a j-tého sloupce matice a vzápětí i jejího i-tého a j-tého riadku.

(4) Vynásobení i-tého sloupce a vzápětí i i-tého řádku matice libovolným nenulovým skalárem $c \in K$ (diagonální prvek a_{ii} se tím změní na $c^2 a_{ii}$).

Úpravě (3) odpovídá záměně pořadí souřadnic $x_i \leftrightarrow x_j$ a (4) substituci x_i/c místo x_i.

Příklad 18. Budeme upravovat symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

na s ní kongruentní diagonální tvar. Začneme úpravami typu (1). Nejprve vynulujeme pomocí prvku $a_{22} = -2$ zbývající nenulové prvky druhého sloupce a řádku.

Za tím účelem připočteme $\frac{1}{4}$-násobek druhého sloupce k prvnímu sloupci a vzápětí vykonáme stejnou operaci s řádky.

Potom připočteme $\frac{1}{2}$-násobek druhého sloupce k třetímu sloupci a to jisté provedeme s řádky.

Postupně dostaneme

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Provedením příslušných ESO na jednotkovou matici dostaneme

$$\mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

přičemž znakem $\wr$ označujeme *sloupcovou* ekvivalenci matic.

Dále vynulujeme pomocí prvku $a_{11} = \frac{1}{8}$ zbývající nenulové prvky prvního sloupce a řádku, t. j. odpočítáme dvojnásobek prvního sloupce od třetího a to stejné provedeme s řádky. Příslušnou sloupcovou operaci provedeme i na matici získanou z $\mathbf{I}_4$. Obdržíme pak matice

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{I}_4 \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože úpravu typu (1) nemůžeme dále aplikovat, použijeme úpravu typu (2).

Připočítáme čtvrtý sloupec k třetímu a to stejné provedeme i pro řádky. Potom už opět můžeme použít úpravu typu (1). Odpočítame $\frac{1}{2}$-násobek třetího sloupce od čtvrtého a to stejné provedeme i pro řádky. Po provedení příslušných ESO na matici získané z $\mathbf{I}_4$ dostaneme výsledek v diagonálním tvaru

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = \mathbf{B},$$

a příslušnou matici přechodu

$$\mathbf{I}_4 \quad \wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\wr \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}.$$

Samozřejmě můžeme převést diagonální matici B a matici přechodu P na daleko příjemnější tvar:

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}',$$

$$\mathbf{I}_4 \wr \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}'.$$