10. DETERMINANTY

10.1. Orientovaný objem a multilineární alternující funkce

Otázka: Jak vypadají vzorce pre plošný obsah rovnoběžníku v rovině v $\mathbb{R}^2$, jehož dvě sousední strany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$, resp. pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru $\mathbb{R}^3$, jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

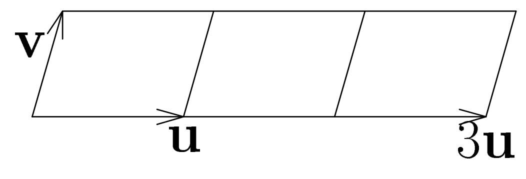
Ujasnění si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru. Zobecnění na n-rozměrné vektorové prostory K^n nad libovolným číselnám tělesem K.

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X. Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$. Obsah je navíc *aditivní* funkce, t. j. pre útvary X, Y také, že $P(X \cap Y) = 0$, platí $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$. Konečně, $P(X) = 0$ pro libovolnou úsečku X.

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u}+b\mathbf{v};\ a, b \in \langle 0, 1\rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Platí pak rovnosti

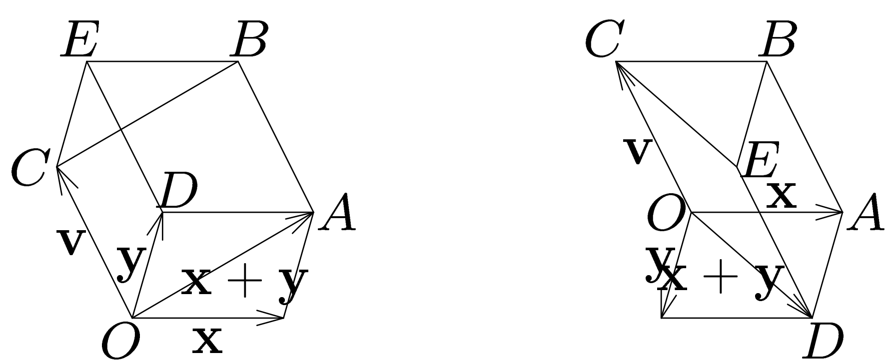
$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \qquad P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{Z}$. Situace pre $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.



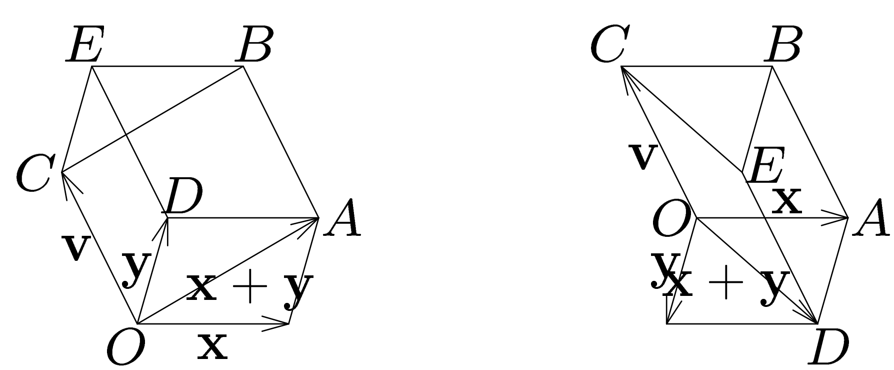
Platnost druhé rovnosti pro všechna $c \in \mathbb{Q}$ plyne z platnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platnost pre všechna $c \in \mathbb{R}$ plyne ze spojitosti obsahu.

Uvažme následující dva obrázky.



V prvním případě určují vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$. Ze shodnosti trojúhelníků OAD, CBE potom na základě uvedených vlastností obsahu vyplývá rovnost

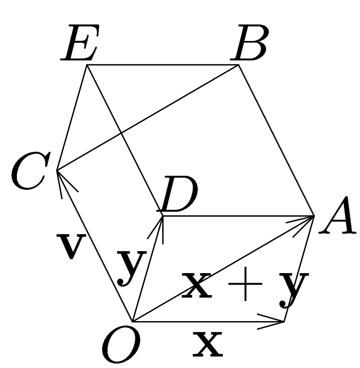
$$P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x},\mathbf{v}) + P(\mathbf{y},\mathbf{v}).$$

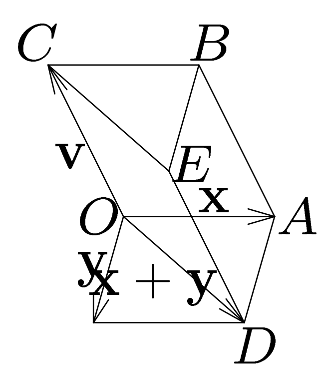


V druhém případě určují vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ je shodný s rovnoběžníkem $DABE$. Ze shodnosti trojúhelníků ODA, CEB vyplývá $P(\mathbf{x},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) + P(\mathbf{y},\mathbf{v})$, tedy

$$P(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{v}) = P(\mathbf{x},\mathbf{v}) - P(\mathbf{y},\mathbf{v}),$$

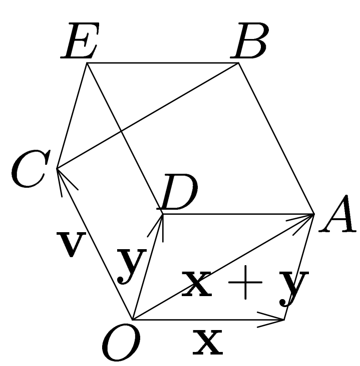
což je nepříjemné překvapení, určitě bychome dali přednost stejnému vzorci.

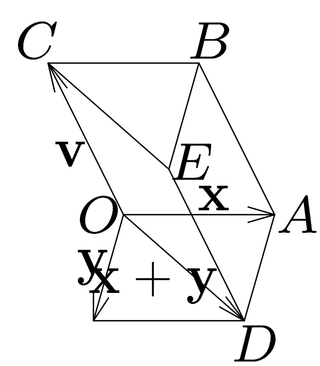




Všimněme si však , že kratší otočení vektoru $\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$ je orientované proti kratším otočením vektorů $\mathbf{x}$ i $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ do vektoru $\mathbf{v}$.

V druhém případě by sa nám proto hodilo, aby obsah rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$ měl z tohoto důvodu opačné znaménko než obsahy rovnoběžníků příslušejících vektorům $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ resp. $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{v}$.





Tento cíl můžeme dosáhnou, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich *orientovaný plošný obsah*, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Tento přístup nám navíc umožní zbavit se absolutní hodnoty v rovnosti $P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným číselným tělesem K, provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad číselným tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Říkáme, že zobrazení $F\,V^n \to K$ je

(a) n-*lineární* nebo též *multilineární*, pokud pre každé $1 \leq j \leq n$ a libovolné vektory

$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ přiřazení

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

definuje lineární zobrazenie $V \to K$, t. j. pre všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(& \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n) \\ & = aF(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n) \\ & +bF(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \ldots, \mathbf{u}_n); \end{aligned}$$

(b) *antisymetrické* alebo tiež *alternující*, pokud pre všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in V$ platí

$$F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_n) =$$

$$-F(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

Lemma 1. Nechť $F : V^n \to K$ je alternující funkce, K číselné těleso, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ a σ je libovolné zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

(a) Je-li σ permutace, tak $F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$;

(b) Pokud σ není permutace, tak

$$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = 0.$$

Lemma 2. Nechť $F\ V^n \to K$ je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ platí:

(a) Připočtením skalárního násobku nějakého z vektorů k jinému vektoru se hodnota $F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ nezmění, t. j. pro libovolné $c \in K$ a $i, j \leq n$ platí

$$F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j + c\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) \\ = F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

(b) Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, tak $F(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = 0$.

Jak vypadají všechny bilineární (t. j. 2-lineární) alternující funkce $F\,K^2 \times K^2 \to K^2$ nad číselným tělesem K.

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2. Pokud dvakrát po sebe využijeme bilinearitu a na závěr antisymetrii F, postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= F(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{v})\\
&= u_1F(\mathbf{e}_1,\mathbf{v}) + u_2F(\mathbf{e}_2,\mathbf{v})\\
&= u_1F(\mathbf{e}_1,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) + u_2F(\mathbf{e}_2,\ v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)\\
&= u_1v_1F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + u_1v_2F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\\
&\quad + u_2v_1F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) + u_2v_2F(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)\\
&= F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)(u_1v_2 - u_2v_1)\\
&= F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

kde výraz

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

je determinant matice $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n-lineární alternující funkce $F : K^{n\times n} \to K$. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ je matice se sloupci

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

S využitím n-linearity F pro každý z n sloupců matice $\mathbf{A}$ můžeme výraz $F(\mathbf{A})$ postupně roznásobit, čímž dostaneme součet n^n členů tvaru

$$a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}),$$

z kterých každý odpovídá právě jednomu zobrazení σ množiny $\{1, \ldots, n\}$ do sebe. Podle lemmatu 1 sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0 a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Na závěr tak dostáváme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} \\ &= F(\mathbf{I}_n) \textstyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}, \end{aligned}$$

kde příslušná suma obsahuje $n!$ sčítanců, jeden pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

10.2. Definice a základní vlastnosti determinantu

Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ nazýváme výraz

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používame též označení $|\mathbf{A}|$. Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat *determinant řádu n*.

Speciálně pro matici $(a_{ij}) \in K^{3\times 3}$ dostáváme vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

známý jako *Sarrusovo pravidlo*.

Tvrzení 3. Determinant transponované matice sa rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Důkaz.

$$\det \mathbf{A}^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

$$\det \mathbf{A}^T = \sum_{\varrho \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\varrho|} a_{\varrho(1)\,1} \dots a_{\varrho(n)\,n} = \det \mathbf{A}.$$

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova „sloupec“ nahradíme slovem „řádek“ a naopak.

Tvrzení 4. Nechť $1 \leq m < n$ a $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je bloková matica tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times (n-m)}$ a $\mathbf{D} \in K^{(n-m) \times (n-m)}$. Potom

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Důkaz.

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{pokud } 1 \leq i, j \leq m, \\ c_{i\,j-m}, & \text{pokud } 1 \leq i \leq m < j \leq n, \\ 0, & \text{pokud } 1 \leq j \leq m < i \leq n, \\ d_{i-m\,j-m}, & \text{pokud } m < i, j \leq n. \end{cases}$$

Označme $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_n; (\forall j \leq m)(\sigma(j) \leq m)\}$. Potom pro $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus G$ platí $a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(n)\,n} = 0$.

Pro $\sigma \in G$ můžeme definovat permutace $\sigma' \in \mathcal{S}_m$ a $\sigma'' \in \mathcal{S}_{n-m}$ pomocí předpisu $\sigma'(j) = \sigma(j)$, pokud $1 \leq j \leq m$, resp. $\sigma''(k) = \sigma(k+m) - m$, pokud $1 \leq k \leq n-m$. Přiřazením $\sigma \mapsto (\sigma', \sigma'')$ je daná bijekce $G \to \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_{n-m}$ a platí $|\sigma| = |\sigma'| + |\sigma''|$.

Můžeme pak psát

$$
\begin{aligned}
&\det \mathbf{A} = \\
&\textstyle\sum_{\sigma \in G} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \dots a_{\sigma(m)\,m} a_{\sigma(m+1)\,m+1} \dots a_{\sigma(n)\,n} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma \in G} (-1)^{|\sigma'|+|\sigma''|} b_{\sigma'(1)\,1} \dots b_{\sigma'(m)\,m} \\
&\cdot d_{\sigma''(1)\,1} \dots d_{\sigma''(n-m)\,n-m} \\
&= \textstyle\sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_m} (-1)^{|\sigma'|} b_{\sigma'(1)\,1} \dots b_{\sigma'(m)\,m} \\
&\cdot \textstyle\sum_{\sigma'' \in \mathcal{S}_{n-m}} (-1)^{|\sigma''|} d_{\sigma''(1)\,1} \dots d_{\sigma''(n-m)\,n-m} \\
&= \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.
\end{aligned}
$$

(1) Pokud $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \textbf{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \ldots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

(2) Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se nazývá *horní (dolní) trojúhelníková matice*, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$ (resp. pre $i > j$). Pro horní i dolní trojúhelníkové matice platí

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \ldots a_{nn},$$

t. j. determinant takové matice je součinem jejích diagonálních prvků. Speciálně to platí pre diagonální matice.

10.3. Charakterizace determinantu a regulárních matic

Věta 5. Determinant řádu n je n-lineární alternující funkce $K^{n\times n} \to K$ sloupců matice. Navíc, pro každý skalár $c \in K$ existuje jediné multilineární alternující zobrazení $F : K^{n\times n} \to K$ sloupců matice tak, že $F(\mathbf{I}_n) = c$. Toto F je dané předpisem

$$F(\mathbf{A}) = c \det \mathbf{A}.$$

Determinant $\det : K^{n\times n} \to K$ je jednoznačně určený ako n-lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Tato rovnost koresponduje s přirozenou volbou jednotky orientovaného n-rozměrného objemu v K^n – je jí orientovaný objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (v tomto pořadí).

Věta (Cauchy) 6. Pro libovolné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

t. j. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Důkaz. Zvolme pevně matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a definujme zobrazení $F : K^{n \times n} \to K$ předpisem $F(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ pro $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$. Ověříme, že F je n-lineární antisymetrické zobrazení sloupců matice $\mathbf{B}$; označme je $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Antisymetrie F. Nech $1 \leq i < j \leq n$ a $\mathbf{B}'$ je matica, ktorá vznikne zámenou i-teho a j-teho stĺpca matice $\mathbf{B}$. S využitím antisymetrie determinantu dostávame

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{B}) &= \det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_n))\\
&= \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n)\\
&= -\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n)\\
&= -\det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_j,\ldots,\mathbf{v}_i,\ldots,\mathbf{v}_n)) = -F(\mathbf{B}').
\end{aligned}
$$

Multilinearita F. Zafixujme sloupce $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{j-1},\mathbf{v}_{j+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ a na místo j-tého sloupce dosaďme vektor $a\mathbf{x}+b\mathbf{y}$. S využitím n-linearity F nám vyjde

$$
\begin{aligned}
&F(\mathbf{v}_1,\ldots,a\mathbf{x}+b\mathbf{y},\ldots,\mathbf{v}_n)\\
&\quad= \det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}_1,\ldots,a\mathbf{x}+b\mathbf{y},\ldots,\mathbf{v}_n))\\
&\quad= \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{A}\cdot(a\mathbf{x}+b\mathbf{y}),\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n))\\
&\quad= \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,a(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})+b(\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}),\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n))\\
&\quad= a\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{x},\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n)\\
&\qquad\quad +b\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{y},\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_n)\\
&\quad= a\det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{v}_n))\\
&\qquad\quad +b\det(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{v}_n))\\
&\quad= aF(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{v}_n)+bF(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{v}_n).
\end{aligned}
$$

F má tvar $F(\mathbf{B}) = c\det\mathbf{B}$ pro jednoznačně určený skalár $c = F(\mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_n) = \det\mathbf{A}$.

Věta 7. Čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. V tomto případě

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

Důkaz. Pokud $\mathbf{A}$ je singulární, tak jsou její sloupce lineárně závislé. Podle lemmatu 1 (b) je $F(\mathbf{A}) = 0$ pro každou n-lineární alternující funkci $F : K^{n\times n} \to K$. Tedy $\det \mathbf{A} = 0$. Naopak, nechť $\mathbf{A}$ je regulární. Potom dle Cauchyho věty

$$\det \mathbf{A} \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I}_n = 1.$$

Proto $\det \mathbf{A} \neq 0$ a $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$.

10.4. Laplaceův rozvoj determinantu

Pro $n = 1$ není co dokazovat. Budeme v dalším předpokládat, že $n \geq 2$.

Důkaz věty 5 Nejprve dokážeme antisymetrii determinantu. Zřejmě stačí ověřit, že pro libovolné $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, $\tau \in \mathcal{S}_n$ platí

$$\det(\mathbf{s}_{\tau(1)}(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_{\tau(n)}(\mathbf{A})) = (-1)^{|\tau|} \det \mathbf{A}.$$

Podle definice determinantu

$$\det(\mathbf{s}_{\tau(1)}(\mathbf{A}),\ldots,\mathbf{s}_{\tau(n)}(\mathbf{A})) \\ = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}(-1)^{|\sigma|}a_{\sigma(1)\,\tau(1)}\ldots a_{\sigma(n)\,\tau(n)}.$$

Pro všechna $i, j \leq n$ platí $i = \tau(j) \Leftrightarrow \tau^{-1}(i) = j$ a tedy $\sigma(j) = (\sigma \circ \tau^{-1})(i),$.

Seřazením činitelů v součinu $a_{\sigma(1)\,\tau(1)} \ldots a_{\sigma(n)\,\tau(n)}$ podle druhého indexu obdržíme tvar

$$a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(1)\,1} \ldots a_{(\sigma\circ\tau^{-1})(n)\,n}.$$

Přiřazení $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau^{-1}$ je bijekce $\mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$, z tohoto důvodu záměnou sumace přez $\sigma \in \mathcal{S}_n$ za sumaci přez $\sigma \circ \tau^{-1} = \varrho \in \mathcal{S}_n$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{s}_{\tau(1)}(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_{\tau(n)}(\mathbf{A})) \\
&\qquad = \textstyle\sum_{\varrho \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\varrho \circ \tau|} a_{\varrho(1)\,1} \ldots a_{\varrho(n)\,n} \\
&\qquad = (-1)^{|\tau|} \det \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j-tého sloupce $(a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$. Pro $i \leq n$ označme $\mathcal{S}_n(i,j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)\,1} \ldots a_{\sigma(j-1)\,j-1} a_{\sigma(j+1)\,j+1} \ldots a_{\sigma(n)\,n}.$$

Potom zřejmě

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a_{ij} \\
&= (\tilde{a}_{1j}, \ldots, \tilde{a}_{nj}) \cdot (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T,
\end{aligned}$$

což dokazuje linearitu.

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i,j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j,i)$) pro i-tý řádek $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ matice $\mathbf{A}$ její determinant má rozvoj

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij} \\ &= (a_{i1},\ldots,a_{in}) \cdot (\tilde{a}_{i1},\ldots,\tilde{a}_{in})^T.\end{aligned}$$

se stejně definovanými koeficienty $\tilde{a}_{ij}$.

Uvedený prvek $\tilde{a}_{ij}$ nazývame *algebraickým doplňkem* prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$. Matici $\widetilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ nazýváme *maticí algebraických doplňků* k matici $\mathbf{A}$.

Tvrzení 8. Nechť $\mathbf{A}_{ij}$ označuje matici řádu $n-1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Potom

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|.$$

Důkaz Označme $\mathbf{B}$ matici, která vznikne nahrazením j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$ sloupcovým vektorem $\mathbf{e}_i \in K^n$. Zřejmě $\tilde{a}_{ij} = |\mathbf{B}|$. Postupnou výměnou sousedních sloupců dostaneme j-tý sloupec na pozici n-tého a podobně i-tý řádek na pozici n-tého řádku. Dostaneme pak matici tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{b}$ vznikne z i-tého řádku matice $\mathbf{A}$ vynecháním j-tého prvku a $\mathbf{0}$ je nulový sloupec délky $n-1$. Determinant této matice je $|\mathbf{A}_{ij}|$. Platí

$$\tilde{a}_{ij} = |\mathbf{B}| = (-1)^{2n-(i+j)}|\mathbf{C}| = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|.$$

Determinanty matic, které vzniknou vynecháním některých řádků a stejného počtu sloupců z matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, nazýváme jejími *minory*, případně *subdeterminanty* determinantu $|\mathbf{A}|$.

Věta (Laplaceova) 9. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, $1 \le k, l \le n$. Potom

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j} a_{kj}\, |\mathbf{A}_{kj}| \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}|\, a_{il}.\end{aligned}$$

Uvedené součty nazýváme *Laplaceovými rozvoji* determinantu $|\mathbf{A}|$ – první podle k-tého řádku, druhý podle l-tého sloupce.

10.5. Výpočet determinantu

Vypočítáme tzv. *Vandermondův determinant* řádu n

$$\mathbf{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{VD}_{n-1}(x_2, \dots, x_n) = (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2)\, \mathbf{VD}_{n-2}(x_3, \dots, x_n),$$

atd. Zřejmě $\mathbf{VD}_1(x_n) = 1$, tj.

$$\mathbf{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i), .$$

10.6. Inverzní matice a Cramerovo pravidlo

Věta 10. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární matica. Potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\widetilde{\mathbf{A}}^T.$$

Věta 11. Věta. Nechť $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in K^n$ a pro $1 \leq j \leq n$ nechť $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ označuje matici, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jej=iho j-t=eho sloupce sloupcovým vektorom $\mathbf{b}$. Potom soustava $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \ldots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}\right)^T.$$