12. BILINEÁRNE A KVADRATICKÉ FORMY NAD POĽOM $\mathbb{R}$

V tejto kapitole budeme pokračovať v štúdiu bilineárnych a kvadratických foriem. Obmedzíme sa však na bilineárne a kvadratické formy na vektorových priestoroch nad poľom reálnych čísel. Tento zvláštny prípad je zároveň najdôležitejší z hľadiska aplikácií lineárnej algebry v geometrii a matematickej analýze. Ako príklad toho si v poslednom paragrafe predvedieme využitie reálnych kvadratických foriem pri hľadaní a klasifikácii extrémov a sedlových bodov funkcií viac premenných.

Pole $\mathbb{R}$ má charakteristiku ∞, teda $\operatorname{char}\mathbb{R} \neq 2$. To nám umožňuje plne využiť všetky výsledky predchádzajúcej kapitoly. Množina reálnych čísel je však popri štruktúre poľa vybavená aj reláciou usporiadania, ktorá je vhodne zladená so sčítaním a násobením na $\mathbb{R}$. Navyše, pre $a \in \mathbb{R}$ platí $a \geq 0$ práve vtedy, keď existuje nejaké $b \in \mathbb{R}$ také, že $a = b^2$. Práve táto vlastnosť nám umožní hlbšie objasniť a jemnejšie klasifikovať štruktúru bilineárnych a kvadratických foriem nad $\mathbb{R}$.

12.1. Signatúra

Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matica. Podľa vety 11.3.5 $\boldsymbol{A}$ je kongruentná s nejakou diagonálnou maticou $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú rovnakú hodnosť $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$, ktorá sa zrejme rovná počtu nenulových prvkov na diagonále matice $\boldsymbol{B}$. Popri hodnosti sú však i počty kladných a záporných prvkov na diagonále matice $\boldsymbol{B}$ invariantmi, spoločnými pre navzájom kongruentné matice.

Pre ľubovoľnú *diagonálnu* maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ položme

$$\sigma(\boldsymbol{A}) = (s_+, s_-, s_0),$$

kde s_+ je počet kladných, s_- počet záporných a s_0 počet nulových prvkov na diagonále matice $\boldsymbol{A}$. Usporiadanú trojicu $\sigma(\boldsymbol{A}) = (s_+, s_-, s_0)$ nazývame *signatúrou matice* $\boldsymbol{A}$.

Všimnite si, že tri zložky signatúry $\sigma(\boldsymbol{A})$ nie sú nezávislé. Platí totiž

$$s_+ + s_- = h(\boldsymbol{A}) \qquad \text{a} \qquad s_+ + s_- + s_0 = n,$$

to znamená, že pri znalosti rozmeru n a hodnosti $h(\boldsymbol{A})$ je signatúra jednoznačne určená už jedným z čísel s_+, s_-. Z tohto dôvodu niektorí autori definujú signatúru len ako počet s_+.

Teraz už môžeme sformulovať tvrdenie o invariantnosti signatúry presnejšie.

12.1.1. Veta. *(Sylvestrov zákon zotrvačnosti) Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sú diagonálne matice. Potom*

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \sigma(\boldsymbol{A}) = \sigma(\boldsymbol{B}).$$

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$. Označme $h = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$ hodnosť oboch matíc a k, l počty kladných diagonálnych prvkov v maticiach $\boldsymbol{A}$ resp. $\boldsymbol{B}$. Potom $\sigma(\boldsymbol{A}) = (k, h-k, n-h)$ a $\sigma(\boldsymbol{B}) = (l, h-l, n-h)$, takže stačí dokázať rovnosť $k = l$. Keďže poradie prvkov na diagonále možno prehadzovať pri zachovaní vzťahu kongruencie, môžeme si dovoliť predpokladať, že naše matice majú tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_k, -a_{k+1}, \ldots, -a_h, 0, \ldots, 0), \\ \boldsymbol{B} &= \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_l, -b_{l+1}, \ldots, -b_h, 0, \ldots, 0), \end{aligned}$$

kde $a_i > 0$, $b_i > 0$ pre $i \leq h$. Keďže $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$, existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taká, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$. Jej stĺpce tvoria bázu $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^n$. Potom $\boldsymbol{A}$ ja maticou kvadratickej formy

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

na $\mathbb{R}^n$ v báze $\boldsymbol{\varepsilon}$, zatiaľ čo $\boldsymbol{B}$ je jej maticou v báze $\boldsymbol{\beta}$ (pozri vetu 11.3.3). Označme

$$S = [\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k], \qquad T = [\boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$$

lineárne podpriestory v $\mathbb{R}^n$. Pre každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{e}_k \in S$ platí

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 > 0.$$

Podobne, pre každý vektor $\boldsymbol{y} = y_{l+1}\boldsymbol{v}_{l+1} + \ldots + y_n\boldsymbol{v}_n \in T$ platí

$$q(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{y})_{\boldsymbol{\beta}} = -b_{l+1}y_{l+1}^2 - \ldots - b_hy_h^2 \leq 0.$$

Z toho vyplýva, že $S \cap T = \{\boldsymbol{0}\}$, teda

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T = k + (n - l).$$

Keďže $S + T \subseteq \mathbb{R}^n$, zrejme $\dim(S + T) \leq n$. Z nerovnosti $k + n - l \leq n$ okamžite vyplýva $k \leq l$. Zo symetrie vzťahu kongruencie dostávame tiež $l \leq k$.

Práve dokázaná veta umožňuje korektne rozšíriť definíciu signatúry z diagonálnych matíc na všetky symetrické matice, a taktiež na symetrické bilineárne a kvadratické formy.

Signatúrou symetrickej matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, označenie $\sigma(\boldsymbol{A})$, rozumieme signatúru ľubovoľnej s ňou kongruentnej diagonálnej matice $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Signatúrou symetrickej bilineárnej formy* $F\colon V^2 \to \mathbb{R}$ na konečnorozmernom reálnom vektorovom priestore V, označenie $\sigma(F)$, rozumieme signatúru jej matice vzhľadom na ľubovoľnú bázu vo V. Konečne *signatúrou kvadratickej formy* $q\colon V \to \mathbb{R}$ na konečnorozmernom vektorovom priestore nad $\mathbb{R}$, označenie $\sigma(q)$, rozumieme signatúru jej polárnej formy.

Všimnite si, že pre symetrickú bilneárnu aj pre kvadratickú formu sa príslušná signatúra rovná signatúre nejakej jej diagonálnej matice. Sylvestrov zákon zotrvačnosti spolu s vetou 11.3.4 nám zaručujú, že ľubovoľné dve diagonálne matice zodpovedajúce, danej forme vzhľadom na rôzne bázy, v ktorých má táto forma diagonálnu maticu, majú rovnakú signatúru.

Každú reálnu symetrickú maticu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ možno upraviť na s ňou kongruentnú diagonálnu maticu. Tú zasa možno zmenou poradia prvkov na diagonále upraviť na s ňou kongruentnú maticu tvaru

$$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_k, -d_{k+1}, \ldots, -d_{k+l}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ krát}}),$$

kde $\sigma(\boldsymbol{A}) = (k, l, m)$ a $d_i > 0$ pre $i \leq k + l$. Ak teraz pre každé $i \leq k + l$ vynásobime i-ty stĺpec aj riadok skalárom $1/\sqrt{d_i}$, vyjde nám matica v blokovo diagonálnom tvare

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_k, -\boldsymbol{I}_l, \boldsymbol{0}_{m,m}).$$

Spojením tejto úvahy so Sylvestrovým zákonom dostávame

12.1.2. Veta. *Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sú ľubovoľné symetrické matice. Potom*

$$\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B} \;\Leftrightarrow\; \sigma(\boldsymbol{A}) = \sigma(\boldsymbol{B}).$$

12.1.3. Dôsledok. *Nech V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ konečnej dimenzie n. Potom*

(a) *každá symetrická bilineárna forma $F\colon V^2 \to \mathbb{R}$ má vhodnej báze $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru V blokovo diagonálnu maticu tvaru*

$$[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_k, -\boldsymbol{I}_l, \mathbf{0}_{m,m}),$$

kde $\sigma(F) = (k, l, m)$;

(b) *každá kvadratická forma $q\colon V \to \mathbb{R}$ má vo vhodnej báze $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru V diagonálny tvar*

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2,$$

kde $\sigma(q) = (k, l, n-k-l)$ a $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Pre porovnanie si ešte uvedieme pár poznámok o symetrických bilineárnych a kvadratických formách na vektorových priestoroch nad poľom $\mathbb{C}$ všetkých komplexných čísel a poľom $\mathbb{Q}$ všetkých racionálnych čísel.

Keďže $\operatorname{char}\mathbb{C} = \operatorname{char}\mathbb{Q} = \infty \neq 2$, každú symetrickú maticu $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$ nad jedným i druhým poľom možno upraviť na s ňou kongruentnú diagonálnu maticu

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_h, 0, \ldots, 0),$$

kde $h = h(\boldsymbol{A})$ a $d_j \neq 0$ pre $j \leq h$.

V komplexnom prípade si každý z prvkov d_j môžeme vyjadriť v goniometrickom tvare

$$d_j = r_j(\cos\alpha_j + \mathrm{i}\sin\alpha_j),$$

kde $r_j = |d_j| > 0$ a $0 \leq \alpha_j < 2\pi$. Ak pre každé $j \leq h$ vynásobíme j-ty stĺpec i riadok skalárom

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{r_j}}\left(\cos\frac{\alpha_j}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{\alpha_j}{2}\right),$$

pre ktorý platí $c_j^2 d_j = 1$, dostaneme

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_h, \mathbf{0}_{m,m}),$$

kde $m = n - h$. Z toho vidíme, že nad poľom $\mathbb{C}$ sa nič podobné rozdeleniu nenulových prvkov na kladné a záporné nekoná – všetky nenulové prvky na diagonále sú rovnocenné a možno ich nahradiť jednotkou. Jediným invariantom, ktorý jednoznačne určuje kongruenciu symetrických matíc ako aj kanonický tvar matíc symetrických bilineárnych i kvadratických foriem nad $\mathbb{C}$, je ich hodnosť, ktorá tak plne preberá úlohu signatúry v reálnom prípade. Nasledujúce tvrdenie je upresnením a zhrnutím našich úvah.

12.1.4. Tvrdenie. *(a) Nech $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sú symetrické matice. Potom $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$ práve vtedy, keď $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.*
(b) Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor nad $\mathbb{C}$, a $F\colon V^2 \to \mathbb{C}$ je symetrická bilineárna forma. Potom F má vzhľadom na nejakú bázu $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru V maticu v blokovo diagonálnom tvare $[F]_{\boldsymbol{\alpha}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{I}_h, \boldsymbol{0}_{m,m})$, kde $h = h(F)$ a $m = \dim V - h$.

Kým situácia nad $\mathbb{C}$ je podstatne jednoduchšia než nad $\mathbb{R}$ a dokázali sme ju úplne popísať, nad $\mathbb{Q}$ si tak ľahko poradiť nevieme. Základný problém tkvie v tom, že nie všetky kladné racionálne čísla majú racionálne druhé odmocniny. Tak už pre matice rozmeru 1×1 máme napr. $(2) \not\equiv (1)$ v dôsledku iracionality čísla $\sqrt{2}$. Aby to však nebolo také jednoduché, v rozmere 2×2 napr. platí

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Presvedčte sa o tom!) Systematickému štúdiu kongruencie racionálnych symetrických matíc, ktoré už nie je čiste záležitosťou lineárnej algebry ale aj teórie čísel, sa v tomto kurze viac venovať nebudeme.

12.2. Definitnosť

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$. Kvadratická forma $q\colon V \to \mathbb{R}$ sa nazýva
- (a) *kladne definitná*, ak $q(\boldsymbol{x}) > 0$ pre každé $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V$;
- (b) *kladne semidefinitná*, ak $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ pre každé $\boldsymbol{x} \in V$;
- (c) *záporne definitná*, ak $q(\boldsymbol{x}) < 0$ pre každé $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V$;
- (d) *záporne semidefinitná*, ak $q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ pre každé $\boldsymbol{x} \in V$;
- (e) *indefinitná*, ak existujú $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ také, že $q(\boldsymbol{x}) < 0 < q(\boldsymbol{y})$.

Rovnakú klasifikáciu zavádzame aj pre symetrické bilineárne formy $F\colon V^2 \to \mathbb{R}$ – F má príslušnú vlastnosť definitnosti práve vtedy, keď ňou indukovaná kvadratická forma $q(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, má túto vlastnosť. Podobne, symetrická matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má príslušnú vlastnosť definitnosti práve vtedy, keď túto vlastnosť má kvadratická forma $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ na priestore $\mathbb{R}^n$.

Na začiatok zaznamenáme niekoľko jednoduchých pozorovaní: (a) ⇒ (b), (c) ⇒ (d), no každá z podmienok (a), (c), (e) vylučuje zvyšné dve. Dokonca (e) vylučuje každú z podmienok (b), (d). Podmienky (b), (d) sa vzájomne nevylučujú, no jediná kvadratická forma, ktorá je zároveň kladne aj záporne semidefinitná, je forma identicky rovná nule na V. V dimenzii $n = 1$ je to však jediná (kladne alebo záporne) semidefinitná forma. V dimenzii $n = 1$ takisto neexistujú nijaké indefinitné formy.

Nasledujúce očividné tvrdenie poskytuje úplný popis definitnosti aj regularity kvadratických foriem (a zároveň aj symetrických bilineárnych foriem a symetrických matíc) v jazyku ich signatúry.

12.2.1. Tvrdenie. *Nech V je n-rozmerý vektorový priestor nad poľom $\mathbb{R}$ a $q\colon V \to \mathbb{R}$ je kvadratická forma so signatúrou $\sigma(q) = (s_+, s_-, s_0)$. Potom*
- *(a) q je kladne definitná práve vtedy, keď $\sigma(q) = (n, 0, 0)$;*
- *(b) q je kladne semidefinitná práve vtedy, keď $\sigma(q) = (h(q), 0, n - h(q))$;*
- *(c) q je záporne definitná práve vtedy, keď $\sigma(q) = (0, n, 0)$;*
- *(d) q je záporne semidefinitná práve vtedy, keď $\sigma(q) = (0, h(q), n - h(q))$;*
- *(e) q je indefinitná práve vtedy, keď $s_+ \geq 1$ a $s_- \geq 1$;*
- *(f) q je regulárna práve vtedy, keď $s_0 = 0$.*

Časť (a) predchádzjúceho tvrdenia v spojení s dôsledkom 12.1.3 okamžite dáva

12.2.2. Dôsledok. *Symetrická matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je kladne definitná práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taká, že*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{P}.$$

Tvrdenie 12.2.1 nám spolu s algoritmom z dôkazu vety 11.3.5 (prípadne Lagrangeovou metódou) dáva priamy návod na zistenie charakteru definitnosti nejakej formy či matice. Tak napríklad kvadratická forma z príkladov 11.3.1, 11.3.6 má signatúru $(2, 2, 0)$, teda je indefinitná. Kvadratická forma z príkladu 11.3.2 má signatúru $(2, 0, 0)$, čiže je kladne definitná.

Niekedy však môže byť užitočné, ak dokážeme určiť charakter definitnosti nejakej symetrickej matice (a tým pádom aj ňou určenej kvadratickej či bilineárnej formy) priamo, t. j. bez jej predchádzajúcej úpravy na s ňou kongruentný diagonálny tvar. Za tým účelom najprv zavedieme istú modifikáciu úprav typu (1) z dôkazu vety 11.3.5 – nazveme ich úpravami typu

(1^+) Nech $i \le n$ je najmenší index taký, že $a_{ii} \neq 0$. Potom postupne pre každé $j \le n$ také, že $j > i$ a $a_{ij} = a_{ji} \neq 0$, pripočítame k j-temu stĺpcu matice $\left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)$-násobok i-teho stĺpca a v takto získanej matici pripočítame $\left(-\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right)$-násobok i-teho riadku k j-temu riadku. Inak povedané, pomocou diagonálneho prvku $a_{ii} \neq 0$ vynulujeme všetky nenulové prvky i-teho riadku aj stĺpca, ktoré ležia *napravo* resp. *nadol* od prvku a_{ii}.

Uvedomme si, že matica prechodu, ktorá vznikne vykonaním ESO, zodpovedajúcich nejakým úpravám typu (1^+) na jednotkovej matici, je vždy horná trojuholníková matica s jednotkami na diagonále. Navyše, súčin dvoch matíc takéhoto tvaru má tiež takýto tvar (presvedčte sa o tom).

Ak $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ je matica nad ľubovoľným poľom K a $1 \le k \le n$, tak pre potreby zvyšku tohto paragrafu $\boldsymbol{A}_k$ označuje maticu tvorenú ľavým horným rohom rozmeru $k \times k$ matice $\boldsymbol{A}$. Teda

$$\boldsymbol{A}_1 = (a_{11}), \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A}.$$

12.2.3. Veta. *(Jacobi) Nech K je ľubovoľné pole a $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je symetrická matica hodnosti h. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) matica $\boldsymbol{A}_h$ je regulárna a maticu $\boldsymbol{A}$ možno upraviť na s ňou kongruentný diagonálny tvar výlučne pomocou úprav typu (1^+);

(ii) $|\boldsymbol{A}_k| \neq 0$ pre každé $1 \le k \le h$, a platí

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \dots, \frac{|\boldsymbol{A}_h|}{|\boldsymbol{A}_{h-1}|}, 0, \dots, 0\right);$$

(iii) $|\boldsymbol{A}_k| \neq 0$ pre každé $1 \le k \le h$;

(iv) $|\boldsymbol{A}_k| \neq 0$ pre každé $1 \le k \le h$ a maticu $\boldsymbol{A}$ možno upraviť na s ňou kongruentný diagonálny tvar

$$\operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \dots, \frac{|\boldsymbol{A}_h|}{|\boldsymbol{A}_{h-1}|}, 0, \dots, 0\right)$$

výlučne pomocou úprav typu (1^+).

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nech platí (i). Podľa poznámky, predchádzajúcej dokazovanú vetu existuje horná trojuholníková matica $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ s jednotkami na diagonále taká, že matica $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}$ je v diagonálnom tvare. Zrejme i každá z matíc $\boldsymbol{P}_k$, $1 \le k \le n$, tvorená ľavým horným rohom rozmeru $k \times k$ matice $\boldsymbol{P}$, je v takomto tvare. Označme $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Prenechávame čitateľovi, aby sa sám presvedčil, že potom pre každé $k \le n$ platí

$$\boldsymbol{B}_k = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_k) = \boldsymbol{P}_k^T \cdot \boldsymbol{A}_k \cdot \boldsymbol{P}_k.$$

Determinant každej z matíc $\boldsymbol{P}_k$ je súčin jej diagonálnych prvkov, čiže $|\boldsymbol{P}_k| = 1$. Preto

$$|\boldsymbol{B}_k| = b_1 \ldots b_k = |\boldsymbol{A}_k|$$

pre každé $k \le n$. Keďže matica $\boldsymbol{A}_h$ je regulárna, platí

$$|\boldsymbol{A}_h| = |\boldsymbol{B}_h| = b_1 \ldots b_h \neq 0,$$

teda $b_k \neq 0$ pre všetky $k \le h$. Z jednotlivých rovností $|\boldsymbol{A}_1| = b_1$, $|\boldsymbol{A}_2| = b_1 b_2$, $\ldots$, $|\boldsymbol{A}_h| = b_1 b_2 \ldots b_h$ už priamo vyplýva nenulovosť všetkých minorov $|\boldsymbol{A}_k|$ pre $k \le h$, ako aj rovnosti $b_1 = |\boldsymbol{A}_1|$, $b_2 = |\boldsymbol{A}_2|/|\boldsymbol{A}_1|$, $\ldots$, $b_h = |\boldsymbol{A}_h|/|\boldsymbol{A}_{h-1}|$. Keďže $h(\boldsymbol{B}) = h(\boldsymbol{A}) = h$, pre $h \le k \le n$ platí $b_k = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) platí triviálne.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Nech platí (iii). Dokážeme, že maticu $\boldsymbol{A}$ možno upraviť na diagonálny tvar

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \ldots, \frac{|\boldsymbol{A}_h|}{|\boldsymbol{A}_{h-1}|}, 0, \ldots, 0\right)$$

len pomocou úprav typu (1^+). Nakoľko platí $a_{11} = |\boldsymbol{A}_1| \neq 0$, pomocou a_{11} možno vynulovať všetky ostatné prvky prvého riadku aj stĺpca matice $\boldsymbol{A}$. Keďže ležia napravo resp. nadol od a_{11}, ide o úpravu typu (1^+). Dostaneme tak maticu v blokovo diagonálnom tvare

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(a_{11}, \boldsymbol{C}^{(1)}\right),$$

kde $\boldsymbol{C}^{(1)} = \left(c_{ij}^{(1)}\right)$ je matica rozmeru $(n-1)\times(n-1)$ nad K. Vzhľadom na charakter vykonaných stĺpcových a riadkových úprav platí

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & c_{11}^{(1)} \end{pmatrix},$$

a taktiež $|\boldsymbol{A}_2| = a_{11} c_{11}^{(1)}$, čiže

$$c_{11}^{(1)} = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{a_{11}} = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|} \neq 0.$$

Pomocou prvku $c_{11}^{(1)} \neq 0$ možno teraz vynulovať všetky ostatné prvky prvého riadku aj stĺpca matice $\boldsymbol{C}^{(1)}$. Opäť ide o úpravu typu (1^+) na matici $\operatorname{diag}\left(a_{11}, \boldsymbol{C}^{(1)}\right)$. Dostaneme tak maticu v blokovo diagonálnom tvare

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(a_{11}, \boldsymbol{C}^{(1)}\right) \equiv \operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \boldsymbol{C}^{(2)}\right),$$

kde $\boldsymbol{C}^{(2)} = \left(c_{ij}^{(2)}\right) \in K^{(n-2)\times(n-2)}$. Rovnakou úvahou ako v predošlom prípade dospejeme k záveru, že

$$c_{11}^{(2)} = \frac{|\boldsymbol{A}_3|}{|\boldsymbol{A}_2|} \neq 0.$$

Takto môžeme pokračovať tak dlho, až kým nedospejeme k blokovo diagonálnemu tvaru

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \dots, \frac{|\boldsymbol{A}_h|}{|\boldsymbol{A}_{h-1}|}, \boldsymbol{C}^{(h)}\right),$$

kde $\boldsymbol{C}^{(h)} \in K^{(n-h)\times(n-h)}$. Vzhľadom nato, že obe matice majú hodnosť h, (pokiaľ $h < n$) matica $\boldsymbol{C}^{(h)}$ je identicky nulová.

(iv) $\Rightarrow$ (i) je opäť triválne.

12.2.4. Veta. *(Sylvestrovo kritérium) Nech $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matica. Potom*
(a) $\boldsymbol{A}$ je kladne definitná práve vtedy, keď $|\boldsymbol{A}_k| > 0$ pre všetky $1 \leq k \leq n$;
(b) $\boldsymbol{A}$ je záporne definitná práve vtedy, keď $(-1)^k|\boldsymbol{A}_k| > 0$ pre všetky $1 \leq k \leq n$.

Dôkaz. (a) Nech $\boldsymbol{A}$ je kladne definitná. Podľa dôsledku 12.2.2 existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, taká, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \cdot \boldsymbol{P}$. Keďže $|\boldsymbol{P}| \neq 0$, odtiaľ už priamo vyplýva

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{P}^T| \cdot |\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|^2 > 0.$$

Pre každé $1 \leq k \leq n$ označme $S_k = [\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k]$ lineárny podpriestor v $\mathbb{R}^n$ generovaný prvými k vektormi kanonickej bázy $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $q_k = q \restriction S_k$ zúženie kvadratickej formy $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ na podpriestor S_k. Zrejme každé q_k je kladne definitná kvadratická forma, ktorá má v báze $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k)$ podpriestoru S_k maticu $\boldsymbol{A}_k$. Takže každá z matíc $\boldsymbol{A}_k$, $1 \leq k \leq n$, je kladne definitná. Podľa prvej časti dôkazu z toho vyplýva $|\boldsymbol{A}_k| > 0$.

Nech naopak všetky minory $|\boldsymbol{A}_k|$, $1 \leq k \leq n$, sú kladné. Potom $h(\boldsymbol{A}) = n$ a podľa Jacobiho vety platí

$$\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{diag}\left(|\boldsymbol{A}_1|, \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}_1|}, \dots, \frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}_{n-1}|}\right).$$

Keďže všetky diagonálne prvky v poslednej matici sú kladné, $\boldsymbol{A}$ je kladne definitná.

(b) vyplýva z (a) na základe faktu, že $\boldsymbol{A}$ je záporne definitná práve vtedy, keď $-\boldsymbol{A}$ je kladne definitná, a rovnosti $|-\boldsymbol{A}_k| = (-1)^k|\boldsymbol{A}_k|$ splnenej pre všetky $k \leq n$.

12.3. Extrémy funkcií viac premenných

V tomto paragrafe si predvedieme, ako nám čerstvo nadobunuté poznatky o kvadratických formách môžu pomôcť pri štúdiu funkcií viac premenných, presnejšie pri hľadaní extrémov a sedlových bodov takýchto funkcií a všeobecnejšie pri klasifikácii ich stacionárnych bodov.

Najprv si zopakujme, ako si počíname v prípade funkcie jednej premennej. Pre jednoduchosť sa obmedzíme len na „dostatočne hladké“ funkcie.

Reálnu funkciu jednej premennej $f\colon A \to \mathbb{R}$ definovanú na nejakej otvorenej množine[1] $A \subseteq \mathbb{R}$ nazveme pre účely tohto paragrafu *dostatočne hladkou*, ak f má na celej množine A konečnú a spojitú prvú i druhú deriváciu. Z matematickej analýzy

[1]Množina $A \subseteq \mathbb{R}$ sa nazýva *otvorená*, ak pre každé $a \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že celý otvorený interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ je obsiahnutý v množine A.

si pripomeňme si, že pre takúto funkciu f máme v každom bode $a \in A$ k dispozícii Taylorov rozvoj

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \theta(x)(x-a)^2$$

pre x z istého okolia[2] $N \subseteq A$ bodu a, pričom funkcia $\theta\colon N \to \mathbb{R}$ je spojitá a vyhovuje podmienke $\theta(a) = 0$, teda absolútna hodnota zvyšku $\theta(x)(x-a)^2$ je v dosť malom okolí $M \subseteq N$ bodu a v porovnaní s ostatnými členmi uvedeného rozvoja zanedbateľne malá. Pre x z tohto malého okolia bodu a teda môžeme písať

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

Ak $f'(a) \neq 0$, tak lineárny člen $f'(a)(x-a)$ mení v bode a znamienko a v dostatočne malom okolí bodu a prevažuje nad kvadratickým členom $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$. Preto dostatočne hladká funkcia (dokonca už funkcia s konečnou a spojitou prvou deriváciou) môže nadobúdať na otvorenej množine extrémy len bodoch a, pre ktoré platí $f'(a) = 0$; hovoríme im *stacionárne* alebo tiež *kritické body* funkcie f. Ak $a \in A$ je stacionárny bod, tak uvedený Taylorov rozvoj má v tomto bode tvar

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \theta(x)(x-a)^2 \approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

pre $x \in M$.

Ak $f''(a) > 0$, tak $f(a) < f(x)$ pre všetky $x \neq a$ z nejakého okolia $L \subseteq M$ bodu a, teda f má v bode a *ostré lokálne minimum.*

Ak $f''(a) < 0$, tak $f(a) > f(x)$ pre všetky $x \neq a$ z nejakého okolia $L \subseteq M$ bodu a, teda f má v bode a *ostré lokálne maximum.*

Ak $f''(a) = 0$, tak v bode a sa može diať v podstate „čokoľvek“, presnejšie, len na základe prvej a druhej derivácie nevieme určiť, či f má v bode a extrém, ani charakter prípadného extrému. Ak f má aj derivácie vyšších rádov, ich znalosť nám môže pomôcť. No tým sa už zaoberať nebudeme.

Podobne si budeme počínať aj pri skúmaní funkcií viac premenných. Namiesto „obyčajnej“ derivácie však musíme uvažovať derivácie podľa rôznych premenných funkcie f – hovoríme im *parciálne derivácie.* Pre čitateľa, ktorý sa s parciálnymi deriváciami dosiaľ nestretol, poznamenávame, že parciálnu deriváciu $\partial f/\partial x_i$ funkcie f podľa premennej x_i dostaneme tak, že f jednoducho derivujeme podľa x_i ako funkciu jednej premennej, pričom všetky ostatné premenné považujeme za konštanty. Druhú parciálnu deriváciu funkcie f, najprv podľa premennej x_j a potom podľa premennej x_i, značíme $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. Namiesto $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_i$ píšeme $\partial^2 f/\partial x_i^2$. Pre jednoduchosť sa opäť obmedzíme len na „dostatočne hladké“ funkcie.

Reálnu funkciu n premenných definovanú na otvorenej množine[3] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme pre účely tohto paragrafu *dostatočne hladkou*, ak f má na celej množine A konečné a spojité všetky parciálne derivácie prvého i druhého rádu.

---

[2]Množina $N \subseteq \mathbb{R}$ sa nazýva *okolím* bodu $a \in \mathbb{R}$, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq N$.

[3]Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva *otvorená*, ak pre každé $\boldsymbol{a} \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ také, že celá otvorená guľa $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,;\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2\}$ je obsiahnutá v množine A.

Nech teda $f\colon A \to \mathbb{R}$ je dostatočne hladká funkcia definovaná na otvorenej množine $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{a} \in A$. *Prvou (totálnou) deriváciou* alebo tiež *gradientom* funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ nazývame vektor

$$f'(\boldsymbol{a}) = \mathrm{grad} f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n}\right),$$

ktorého zložky tvoria prvé parciálne derivácie funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$. *Druhou (totálnou) deriváciou* funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$ nazývame maticu

$$f''(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{n\times n},$$

tvorenú všetkými druhými parciálnymi deriváciami funkcie f v bode $\boldsymbol{a}$. V diferenciálnom počte funkcií viac premenných sa dokazuje, že zo spojitosti druhých parciálnych derivácií vyplýva

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

pre všetky $i, j \le n$ a $\boldsymbol{x} \in A$. To znamená, že druhá derivácia $f''(\boldsymbol{a})$ dostatočne hladkej funkcie f je symetrická matica, teda je maticou kvadratickej formy

$$q(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j}\right) \cdot \boldsymbol{v}^T$$

na (riadkovom) vektorovom priestore $\mathbb{R}^n$ vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$. Ukážeme si, že práve signatúra druhej derivácie $f''(\boldsymbol{a})$ rozhodujúcim (a v prípade jej regularity dokonca jednoznačným) spôsobom určuje chovanie funkcie v jej kritických bodoch.

Podobne ako v prípade jednej premennej, aj dostatočne hladkú funkciu viac premenných možno v každom bode[4] $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A$ písať v tvare Taylorovho rozvoja

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T$$

pre $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ z istého okolia[5] $N \subseteq A$ bodu $\boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) = \big(\theta_{ij}(\boldsymbol{x})\big)_{n\times n}$ je matica, ktorej zložky tvoria hodnoty spojitých funkcií $\theta_{ij}\colon N \to \mathbb{R}$ v bode $\boldsymbol{x}$. Tieto funkcie navyše vyhovujú podmienke $\theta_{ij}(\boldsymbol{a}) = 0$, teda absolútna hodnota zvyšku $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T$ je v dosť malom okolí $M \subseteq N$ bodu $\boldsymbol{a}$ v porovnaní s ostatnými členmi uvedeného rozvoja zanedbateľne malá. Pre $\boldsymbol{x}$ z tohto malého okolia bodu $\boldsymbol{a}$ teda môžeme písať

$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T.$$

[4] Všimnite si, že, tak ako je to zvykom v matematickej analýze, prvky priestoru $\mathbb{R}^n$ zapisujeme ako riadkové vektory.

[5] Množina $N \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva *okolím* bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že $B(\boldsymbol{a}, \varepsilon) \subseteq N$.

Ak $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i} \neq 0$, tak zložka $\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i)$ lineárneho člena $f'(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T$ mení v bode $\boldsymbol{a}$ znamienko a v dostatočne malom okolí bodu $\boldsymbol{a}$ takéto zložky prevažujú nad kvadratickým členom $\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T$. Preto dostatočne hladká funkcia (dokonca už funkcia s konečnými a spojitými prvými parciálnymi deriváciami) môže na otvorenej množine nadobúdať extrémy len v bodoch $\boldsymbol{a}$, pre ktoré platí $f'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, t. j. všetky parciálne derivácie $\partial f/\partial x_i$ v bode $\boldsymbol{a}$ sa rovnajú nule. Takýmto bodom hovoríme *stacionárne* alebo tiež *kritické body* funkcie f. Ak $\boldsymbol{a} \in A$ je stacionárny bod, tak uvedený Taylorov rozvoj má v tomto bode tvar

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \\ &\approx f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \end{aligned}$$

pre všetky $\boldsymbol{x}$ z okolia M bodu $\boldsymbol{a}$.

Ak matica $f''(a)$ je kladne definitná, tak pre všetky $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ z nejakého okolia $L \subseteq M$ bodu $\boldsymbol{a}$ platí $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T > 0$ a $f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x})$, teda f má v bode $\boldsymbol{a}$ *ostré lokálne minimum.*

Ak matica $f''(\boldsymbol{a})$ je záporne definitná, tak pre všetky $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ z nejakého okolia $L \subseteq M$ bodu $\boldsymbol{a}$ platí $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T < 0$ a $f(\boldsymbol{a}) > f(\boldsymbol{x})$, teda f má v bode $\boldsymbol{a}$ *ostré lokálne maximum.*

Ak matica $f''(\boldsymbol{a})$ je indefinitná, tak existujú vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a číslo $\varepsilon > 0$ také, že $\boldsymbol{u} \cdot f''(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{u}^T < 0 < \boldsymbol{v} \cdot f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}^T$, obe úsečky $X = \{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{u};\ |t| \leq \varepsilon\}$, $Y = \{\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v};\ |t| \leq \varepsilon\}$ sú celé obsiahnuté v okolí M a pre všetky body $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$ rôzne od $\boldsymbol{a}$ platí $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) < f(\boldsymbol{x})$. Hovoríme, že f má v bode $\boldsymbol{a}$ *sedlo.* Tento prípad nemôže nastať pre funkcie jednej premennej. Zrejme v sedlovom bode funkcia nenadobúda extrém.

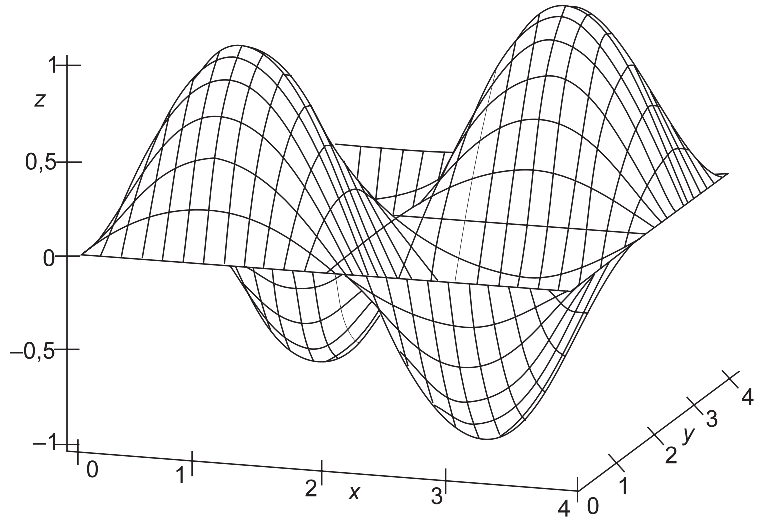
Ak matica $f''(\boldsymbol{a})$ je nenulová, singulárna a semidefinitná, tak náš čitateľ asi očakáva, že f v bode $\boldsymbol{a}$ nadobudne *neostré lokálne minimum* (pre kladne semidefinitnú maticu) alebo *neostré lokálne maximum* (pre záporne semidefinitnú maticu). No nie vždy je tomu tak. Podobne ako v prípade nulovej druhej derivácie u funkcií jednej premennej, ak matica $f''(\boldsymbol{a})$ je singulárna a (kladne alebo záporne) semidefinitná, tak – bez ohľadu nato, či je nulová alebo nie, – v bode $\boldsymbol{a}$ sa môže udiať prakticky „čokoľvek“. Funkcia v tomto bode môže, ale nemusí mať extrém alebo sedlo. Niečo však predsa len môžeme povedať: ak uvedená matica je nenulová a kladne semidefinitná, tak f nemá v bode $\boldsymbol{a}$ (ostré ani neostré) lokálne maximum; ak je nenulová a záporne semidefinitná, tak f nemá v bode $\boldsymbol{a}$ (ostré ani neostré) lokálne minimum. Ak f má aj derivácie vyšších rádov, tak na ich základe často môžeme povedať o niečo viac. Tieto otázky však presahujú rámec nášho úvodného kurzu lineárnej algebry a geometrie. Prípadných záujemcov o ich podrobnejšie štúdium odkazujeme na nejakú učebnicu diferenciálneho počtu funkcií viac premenných.

12.3.1. Príklad. *(Kopčeky a jamky)* Preskúmame funkciu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, danú predpisom $f(x, y) = \sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}$. Jej prvé parciálne derivácie sú

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}.$$

Keďže sinus a kosinus nejakého čísla sa súčasne nemôžu rovnať nule, (x, y) je stacionárnym bodom funkcie f práve vtedy, keď $\cos\frac{\pi x}{2} = \cos\frac{\pi y}{2} = 0$ alebo $\sin\frac{\pi x}{2} = \sin\frac{\pi y}{2} = 0$.

$$z = f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}$$



Teda stacionárnymi bodmi funkcie f sú práve všetky mrežové body roviny tvaru (m,n), kde m, n sú celé čísla rovnakej parity (t. j. $m-n$ je párne číslo).

Vypočítame i druhé parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi y}{2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}.$$

Vidíme, že funkcia f je dostatočne hladká na celej rovine $\mathbb{R}^2$. Jej druhá derivácia v stacionárnych bodoch má tvar

$$f''(m,n) = \frac{\pi^2}{4}\begin{pmatrix} -\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} & \cos\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} \\ \cos\frac{m\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2} & -\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Pre $m=2k$, $n=2l$ obe párne máme

$$f''(m,n) = \frac{\pi^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\frac{m+n}{2}} \\ (-1)^{\frac{m+n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V každom z týchto bodoch je matica indefinitná, teda funkcia f má v bodoch tvaru $(2k,2l)$, kde $k,l\in\mathbb{Z}$, sedlá. Hodnota funkcie vo všetkých sedlových bodoch je 0.

Pre $m=2k+1$, $n=2l+1$ obe nepárne máme

$$f''(m,n) = \frac{\pi^2}{4}\begin{pmatrix} (-1)^{\frac{m+n}{2}} & 0 \\ 0 & (-1)^{\frac{m+n}{2}} \end{pmatrix} \equiv (-1)^{k+l+1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Táto matica je záporne definitná, ak $k+l$ je párne číslo, a kladne definitná pre nepárne $k+l$.

Funkcia f teda nadobúda ostré lokálne maximá v bodoch $(2k+1,2l+1)$, kde k, l sú celé čísla a $k+l$ je párne. Hodnota všetkých týchto maxím je 1.

V bodoch $(2k+1,2l+1)$, kde $k,l\in\mathbb{Z}$ a $k+l$ je nepárne číslo, nadobúda f ostré lokálne minimá, ktorých hodnota je vždy -1.

Na obrázku je graf funkcie f na časti definičného oboru $\langle 0,4\rangle\times\langle 0,4\rangle$. Vidno na ňom maximá v bodoch $(1,1)$, $(3,3)$, minimá v bodoch $(1,3)$, $(3,1)$ a sedlo v bode $(2,2)$.

Nakoľko všetky typy kritických bodov, ktorých charakter možno určiť na základe druhej derivácie funkcie, sa nám podarilo ilustrovať na jedinom príklade, v ďalších ukážkach sa zameriame na funkcie so singulárnymi semidefinitnými druhými deriváciami v kritických bodoch. Keďže v takom prípade nám toho naša teória mnoho nepovie, zvolíme si funkcie, pri ktorých nám charakter kritických bodov bude jasný z názoru, ako napokon aj v prvom príklade. Najprv jeden príklad, kde všetko dopadne podľa očakávania.

12.3.2. Príklad. *(Vlnitý plech)* Je daná funkcia $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde $g(x,y) = \cos(\pi x)$. Jej prvé parciálne derivácie sú

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\pi\sin(\pi x), \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Stacionárne body funkcie g teda vytvárajú systém ekvidistantných rovnobežných priamok (s rovnicami) $x = k$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Druhé parciálne derivácie funkcie g sú

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\pi^2\cos(\pi x), \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0,$$

teda funkcia g je dostatočne hladká. Druhá derivácia v stacionárnych bodoch teda vyzerá takto

$$g''(k,y) = -\pi^2\begin{pmatrix}\cos(k\pi) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = -\pi^2\begin{pmatrix}(-1)^k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Pre k párne dostávame

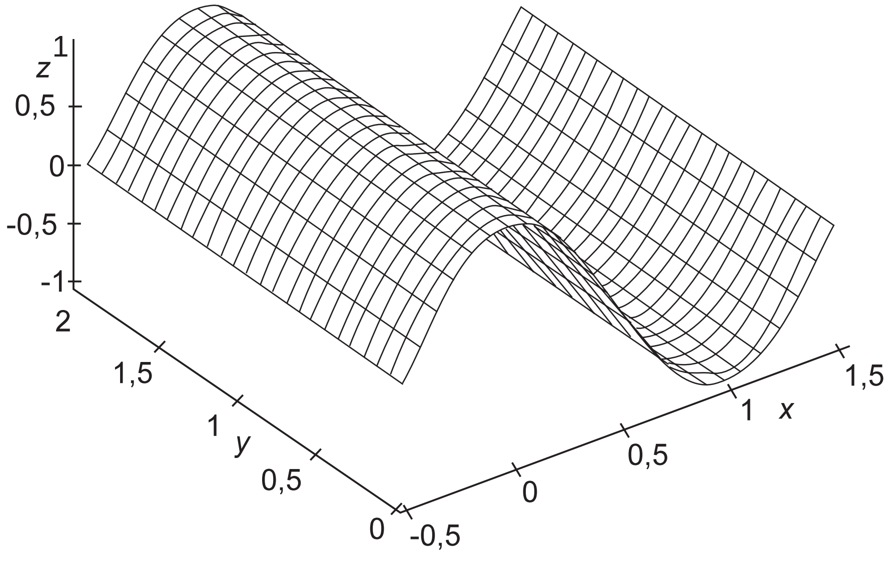
$$g''(k,y) \equiv \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

čo je záporne semidefinitná singulárna matica. Podobne, pre k nepárne máme

$$g''(k,y) \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

čo je kladne semidefinitná singulárna matica. V takom prípade nám naša teória neposkytuje nijaké závery. Z grafu funkcie na časti $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle \times \langle 0, 2\rangle$ definičného oboru a z periodičnosti funkcie $\cos(\pi x)$ však možno usúdiť, že pre párne $k \in \mathbb{Z}$ nadobúda funkcia g na priamkach $x = k$ neostré lokálne maximum hodnoty 1 a pre nepárne $k \in \mathbb{Z}$ nadobúda g na priamkach $x = k$ neostré lokálne minimum hodnoty -1.

$z = g(x,y) = \cos(\pi x)$



Na záver si predvedieme, čo všetko sa v kritickom bode môže ešte stať.

12.3.3. Príklad. *(Kreslo, sieť a sedlo)* Uvažujme reálne funkcie dvoch premenných

$$h_1(x,y) = x^2 + y^3, \qquad h_2(x,y) = x^2 + y^4, \qquad h_3(x,y) = x^2 - y^4.$$

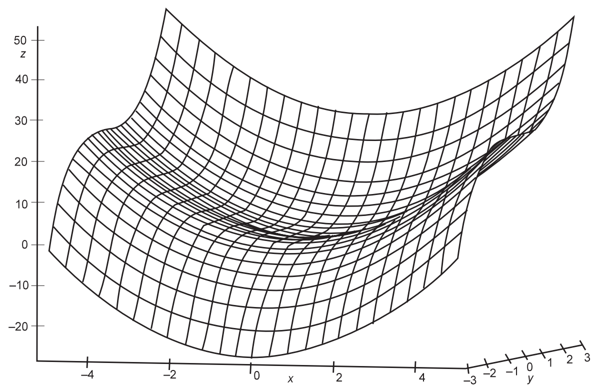
Ľahko možno nahliadnuť, že všetky majú jediný a ten istý stacionárny bod $(0,0)$, v ktorom nadobúdajú tú istú hodnotu 0. Taktiež majú v tomto bode rovnakú druhú deriváciu

$$h_1''(0,0) = h_2''(0,0) = h_3''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(presvedčte sa o tom sami). Takže uvedená matica je nenulová, singulárna a kladne semidefinitná. Z obrázkov grafov funkcií v istých okoliach bodu $(0,0)$ však vidno, že

(1) h_1 nemá v bode $(0,0)$ extrém ani sedlo – v tomto bode sa totiž pretína krivka $z = x^2$, $y = 0$, pre ktorú, je $(0,0)$ bodom ostrého lokálneho minima, s krivkou $x = 0$, $z = y^3$, ktorá má v bode $(0,0)$ inflexný bod;
(2) h_2 má v bode $(0,0)$ ostré lokálne minimum;
(3) h_3 má v bode $(0,0)$ sedlo.

$$z = h_1(x,y) = x^2 + y^3$$



$$z = h_2(x,y) = x^2 + y^4 \qquad\qquad z = h_3(x,y) = x^2 - y^4$$