20. JORDANOV KANONICKÝ TVAR

V tejto kapitole si ukážeme, že i nediagonalizovateľné lineárne operátory či matice možno voľbou vhodnej bázy upraviť na tzv. *Jordanov kanonický tvar*, ktorý je – aspoň na pohľad – veľmi blízky diagonálnemu. Dôkaz tohto výsledku je však podstatne náročnejší než všetky dôkazy, s ktorými sme sa doteraz v tomto kurze stretli. Preto najprv iba sformulujeme príslušné vety a predvedieme, ako sa úprava na Jordanov kanonický tvar v niektorých jednoduchých prípadoch robí. S takýmito vedomosťami vystačíme vo väčšine prípadov. Jednako pre náročnejšieho čitateľa uvádzame úplný dôkaz, ktorý nám zaberie celé dva paragrafy 20.4 a 20.5. S niektorými aplikáciami výsledkov o Jordanovom kanonickom tvare sa oboznámime až v nasledujúcej kapitole.

20.1. Jordanov kanonický tvar matice

Hovoríme, že matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je v *Jordanovom kanonickom tvare*, skrátene JKT, ak má blokovo diagonálny tvar

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),$$

kde $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$ sú Jordanove bunky rozmerov $n_i \times n_i$ prislúchajúce skalárom $\lambda_i \in K$ (pozri príklad 19.1.3). Zrejme v takom prípade je $n_1 + \ldots + n_k = n$ a $\boldsymbol{A}$ má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \dots (\lambda_k - x)^{n_k}.$$

Vidíme, že skalár $\lambda \in K$ je vlastnou hodnotou matice $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, keď sa nachádza v zozname $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Keďže skaláry $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nemusia byť nevyhnutne rôzne, algebraická násobnosť λ vzhľadom na $\boldsymbol{A}$ je súčet veľkostí blokov s hodnotou λ na diagonále, čiže $\sum_{\lambda_i=\lambda} n_i$. Ako vyplýva z príkladu 19.1.3, každému bloku $\boldsymbol{J}_{n_i}(\lambda_i)$, bez ohľadu na veľkosť n_i, zodpovedá len jednorozmerný vlastný podpriestor – preto geometrická násobnosť λ vzhľadon na $\boldsymbol{A}$ je rovná počtu takýchto blokov, t. j. počtu prvkov množiny $\{i \le k;\ \lambda_i = \lambda\}$.

Jordanovým kanonickým tvarom matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ nazývame ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{J} \in L^{n\times n}$ v JKT, kde pole L je nejaké rozšírenie poľa K, podobnú (nad poľom L) s maticou $\boldsymbol{A}$. *Upraviť maticu* $\boldsymbol{A}$ *na Jordanov kanonický tvar* znamená nájsť s ňou podobnú maticu $\boldsymbol{J} \in L^{n\times n}$ v Jordanovom kanonickom tvare a regulárnu maticu $\boldsymbol{P} \in L^{n\times n}$ takú, že $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}$. Potom lineárny operátor $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ na (stĺpcovom) vektorovom priestore L^n má v báze tvorenej stĺpcami matice $\boldsymbol{P}$ maticu $\boldsymbol{J}$ v JKT.

Kľúčové výsledky tejto kapitoly možno zhrnúť do nasledujúcich dvoch viet.

20.1.1. Veta. *Nech $\varphi\colon V \to V$ je lineárny operátor na vektorovom priestore V konečnej dimenzie n nad poľom K. Ak φ má nad K spektrum algebraickej váhy n, tak existuje taká báza $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V, vzhľadom na ktorú má φ maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ v Jordanovom kanonickom tvare. Pritom Jordanov kanonický tvar matice zobrazenia φ je určený jednoznačne až na poradie Jordanových blokov.*

20.1.2. Veta. *Nech matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ má nad poľom K spektrum algebraickej váhy n. Potom $\boldsymbol{A}$ je podobná s maticou $\boldsymbol{J} \in K^{n\times n}$ v Jordanovom kanonickom tvare. Pritom matica $\boldsymbol{J}$ je určená jednoznačne až na poradie Jordanových blokov.*

20.1.3. Dôsledok. *Nech matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ majú v K spektrum plnej algebraickej váhy n. Potom $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú rovnaký Jordanov kanonický tvar.*

Všimnite si, že predpoklad o plnej algebraickej váhe spektra je splnený práve vtedy, keď K obsahuje rozkladové pole charakteristického polynómu lineárneho operátora φ, prípadne matice $\boldsymbol{A}$. Táto podmienka je automaticky splnená nad algebraicky uzavretým poľom K, špeciálne nad poľom komplexných čísel $\mathbb{C}$. Aj v prípade, že tento predpoklad nie je splnený, možno pole K vnoriť do jeho konečného rozšírenia L, nad ktorým už splnený bude. Podrobnosti, ako to možno urobiť, sme si aspoň v prípade rozšírenia $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ objasnili v paragrafe 19.4 venovanom komplexifikácii.

Obe uvedené vety sú zrejme ekvivalentné, preto stačí dokázať len jednu z nich, prípadne dokazovať obe naraz a striedavo používať maticovú či operátorovu formuláciu, podľa toho, ktorá nám práve väčšmi vyhovuje. Dôkazu, ktorý je pomerne náročný, venujeme paragrafy 20.4 a 20.5. Považujeme však za potrebné predoslať mu niekoľko príkladov, na ktorých budeme ilustrovať *metódu* úpravy matice na JKT.

Celá metóda je založená na pozorovaní, čo robí matica $\boldsymbol{J}_n = \boldsymbol{J}_n(\lambda) - \lambda\boldsymbol{I}_n$ s kanonickou bázou $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ v K^n. Odpoveď na túto otázku možno stručne a prehľadne vyjadriť schémou

$$\boldsymbol{J}_n\colon \boldsymbol{e}_n \mapsto \boldsymbol{e}_{n-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{e}_2 \mapsto \boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{0},$$

t. j. $\boldsymbol{J}_n \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$ (inak povedané, $\boldsymbol{e}_1$ je vlastný vektor matice $\boldsymbol{J}_n(\lambda)$), a $\boldsymbol{J}_n \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_{i-1}$ pre $1 < i \le n$.

Ak má teda lineárny operátor $\varphi\colon V \to V$ mať v nejakej báze $\boldsymbol{\beta}$ maticu v JKT

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)\big),$$

musí sa táto báza dať rozložiť na k reťazcov

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= (\boldsymbol{v}_{11}, \dots, \boldsymbol{v}_{1n_1}),\\
\boldsymbol{\beta}_2 &= (\boldsymbol{v}_{21}, \dots, \boldsymbol{v}_{2n_2}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\boldsymbol{\beta}_k &= (\boldsymbol{v}_{k1}, \dots, \boldsymbol{v}_{kn_k}),
\end{aligned}$$

zodpovedajúcich jednotlivým Jordanovým bunkám $\boldsymbol{J}_1(\lambda_1), \boldsymbol{J}_{n_2}(\lambda_2), \dots, \boldsymbol{J}_{n_k}(\lambda_k)$. Na každom reťazci $\boldsymbol{\beta}_i$ pôsobí lineárny operátor $\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V = \varphi - \lambda_i$ rovnako ako matica $\boldsymbol{J}_{n_i}$ na kanonickej báze $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n_i)} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{n_i})$, t. j. podľa schémy

$$\varphi - \lambda_i\colon \boldsymbol{v}_{in_i} \mapsto \boldsymbol{v}_{i\,n_i-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{v}_{i2} \mapsto \boldsymbol{v}_{i1} \mapsto \boldsymbol{0}.$$

Potom prvý vektor $\boldsymbol{v}_{i1}$ každého reťazca $\boldsymbol{\beta}_i$ (v našej schéme prvý nenulový vektor sprava) je vlastným vektorom operátora φ prislúchajúcim k vlastnej hodnote λ_i. Celý reťazec je zasa tvorený postupnými obrazmi posledného vektora $\boldsymbol{v}_{in_i}$ (v našej schéme prvého vektora zľava) v zobrazení $\varphi - \lambda_i$, t. j.

$$\boldsymbol{\beta}_i = \left(\boldsymbol{v}_{in_i}, (\varphi - \lambda_i)(\boldsymbol{v}_{in_i}), \dots, (\varphi - \lambda_i)^{n_i - 1}(\boldsymbol{v}_{in_i})\right).$$

Bázu zloženú z takýchto reťazcov nazývame *Jordanovou bázou* príslušného lineárneho operátora alebo matice.

Úprava matice (lineárneho operátora) na JKT teda spočíva hlavne v nájdení Jordanovej bázy, t. j. bázy zloženej z reťazcov vektorov prislúchajúcich jednotlivým vlastným číslam a vlastným vektorom tejto matice. Také niečo však predpokladá znalosť spektra, preto jeho určenie (prípadne doplnenie do plnej algebraickej váhy vo vhodnom rozšírení základného poľa) musí konštrukcii takejto bázy nevyhnutne predchádzať.

Vopred však poznamenávame, že priamočiara metóda budovania bázických reťazcov od vlastných vektorov „sprava doľava“, dobre funguje len pre matice malých rozmerov (maximálne tak 5×5), prípadne pre matice, v ktorých JKT sa vyskytujú len malé Jordanove bloky (maximálne do rozmeru 3×3). Pre matice väčších rozmerov, kde sa kombinatorika možných rozmerov blokov stáva pestrejšou, je už neúnosne zložitá. Neskôr, na základe dôkazu viet 20.1.1 a 20.1.2, sa zoznámime aj s metódou postupujúcou pri vytváraní bázických reťazcov „zľava doprava“. V literatúre sa možno stretnúť aj s elegantnou metódou založenou na úprave charakteristickej matice $\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}$ pomocou ERO a ESO – tá však využíva niektoré hlbšie poznatky o maticiach, ktorých prvky sú polynómy nad daným poľom.

Samostatnú poznámku si vyžaduje otázka určenia spektra analyzovanej matice alebo operátora. Naše príklady budú vopred umelo pripravené tak, aby sme príslušnú charakteristickú rovnicu vedeli ľahko vyriešiť (väčšinou budú dokonca všetky jej korene malé celé čísla). V „reálnom živote“ to však tak byť nemusí. Vo všeobecnosti neexistujú vzorce, ktoré by vyjadrovali korene polynómu $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ stupňa ≥ 5 ako funkcie jeho koeficientov zostavené pomocou operácií sčítania, odčítania, násobenia, delenia a mocnín s racionálnym exponentom.[1] Ani pre polynómy stupňa 3 a 4, pre ktoré takéto vzorce existujú, však nie sú pre svoju ťažkopádnosť prakticky upotrebiteľné. Takže použiteľné explicitné vzorce máme k dispozícii len na riešenie rovníc stupňa 1 a 2.

Tým vzrastá význam približných numerických metód výpočtu vlastných čísel a vektorov a JKT. Tieto otázky však už nie sú predmetom nášho kurzu. Momentálne nie je našim cieľom výpočtovo zvládnuť uvedenú problematiku v celej všeobecnosti, ale porozumieť jej základným súvislostiam. Keďže práve výsledky a metódy lineárnej algebry hrajú v modernej numerickej matematike významnú úlohu, je takéto prvotné porozumenie jedným z nevyhnutných predpokladov zvládnutia pokročilejších numerických metód.

Jeden numerický aspekt výpočtu JKT však nemožno v tejto súvislosti nespomenúť. Numerické metódy väčšinou dávajú len približné výsledky s istou vopred zadanou presnosťou. Navyše často pracujú so vstupnými údajmi získanými meraním, teda už od začiatku zaťaženými určitými chybami. Na druhej strane, „takmer všetky“ štvorcové matice nad $\mathbb{C}$ sú podobné s diagonálnymi.[2] Pri hocako malej náhodnej zmene prvkov sa takáto matica s pravdepodobnosťou hraničiacou s istotou stane podobnou diagonálnej. Teda matice, ktorých s nediagonálnym JKT sú vlastne atypickými výnimkami s nekonečne málo pravdepodobným výskytom. To jednak činí numerický výpočet JKT značne chúlostivou záležitosťou, jednak navodzuje otázku, aký má vôbec význam zaoberať sa nediagonalizovateľnými maticami a lineárnymi operátormi. Dodajme teda, že na druhej strane typická matica $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s aspoň jednou viacnásobnou vlastnou hodnotou je nediagonalizovateľná (pokúste sa samostatne upresniť význam tohto tvrdenia). Čo je však ešte dôležitejšie, s prirodzenými príkladmi takýchto operátorov sa možno stretnúť v matematickej analýze.

[1] Dôkaz neriešiteľnosti rovníc piateho a vyššieho stupňa pomocou radikálov je súčasťou tzv. Galoisovej teórie a patrí k vrcholným výkonom algebry 19. storočia.

20.1.3. Príklad. Lineárny operátor derivácie $D\colon \mathbb{R}^{(n)}[x] \to \mathbb{R}^{(n)}[x]$, kde $D(f) = f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pre $f \in \mathbb{R}^{(n)}[x]$, na priestore všetkých reálnych polynómov stupňa $\leq n$ má v báze $\boldsymbol{\xi}^{(n)} = (1, x, x^2 \dots, x^n)$ maticu

$$(D)_{\boldsymbol{\xi}^{(n)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho už možno pomerne ľahko nahliadnuť (prípadne dopočítať), že maticou operátora D v báze $\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right)$ je Jordanova bunka $\boldsymbol{J}_{n+1} = \boldsymbol{J}_{n+1}(0)$.

20.2. Príklady úpravy matíc na Jordanov kanonický tvar

20.2.1. Príklad. Uvažujme maticu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Jej charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2$$

má dva korene $x_{1,2} = 1$ a $x_{3,4} = -1$, oba dvojnásobné. Nájdeme k nim príslušné vlastné vektory. Podpriestor riešení homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] Presnejšie, topologická dimenzia množiny všetkých matíc $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ktoré nie sú podobné s diagonálnymi, je menšia než topologická dimenzia priestoru všetkých matíc $\mathbb{C}^{n\times n}$. Podobne, topologická dimenzia množiny všetkých matíc $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ktoré nie sú podobné s diagonálnymi maticami z $\mathbb{C}^{n\times n}$, je menšia než topologická dimenzia priestoru všetkých matíc $\mathbb{R}^{n\times n}$. Pojem topologickej dimenzie je (zďaleka nie priamočiarym) zovšeobecnením dimenzie lineárnych a afinných podpriestorov nad $\mathbb{R}$.

je jednorozmerný, generovaný vlastným vektorom $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,1,1)^T$. Teda algebraicky dvojnásobné vlastné číslo 1 má geometrickú násobnosť 1. Ďalší vektor reťazca nájdeme ako nejaké riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$ sústavy $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ úpravou jej rozšírenej matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

teda napr. $\boldsymbol{v}_2 = (2,-2,1,0)^T$.

Podpriestor riešení homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenziu 2 (a taká je tiež geometrická násobnosť algebraicky dvojnásobného vlastného čísla -1); jeho bázu tvoria vlastné vektory $\boldsymbol{v}_3 = (1,0,-1,0)^T$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,0,1)^T$.

Teda $\boldsymbol{A}$ je podobná matici v JKT

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\bigl(\boldsymbol{J}_2(1),-1,-1\bigr) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a príslušná Jordanova báza $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)$ je tvorená stĺpcami matice prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Videli sme, že reťazce vektorov prislúchajúce rôznym vlastným číslam možno bez ťažkostí oddeliť. Preto odteraz sa sústredíme len na hľadanie a oddeľovanie reťazcov prislúchajúcich tomu istému vlastnému číslu a budeme sa zaoberať iba maticami s jednoprvkovým spektrom.

20.2.2. Príklad. Matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastné číslo $x_{1,2,3} = 0$. Vlastné vektory nájdeme riešením homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podpriestor riešení je jednorozmerný, generovaný vektorom $\boldsymbol{u} = (1,2,1)^T$, teda geometrická násobnosť vlastného čísla 0 je 1. Hľadaná báza tak bude pozostávať z jediného reťazca prislúchajúceho vlastnému vektoru $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}$. Vektor $\boldsymbol{u}_2$ nájdeme ako nejaké riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1$ úpravou jej rozšírenej matice

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{u}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

takže môžeme položiť napr. $\boldsymbol{u}_2 = (-1,-1,0)^T$. Podobne, tretí vektor $\boldsymbol{u}_3$ nášho reťazca nájdeme ako nejaké riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_3$ sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2$ úpravou jej rozšírenej matice

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{u}_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

teda napr. $\boldsymbol{u}_3 = (0,-1,0)^T$.

To znamená, že $\boldsymbol{A}$ je podobná priamo s Jordanovou bunkou

$$\boldsymbol{J}_3 = \boldsymbol{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostredníctvom matice prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tvorenej vektormi Jordanovej bázy $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ ako stĺpcami.

20.2.3. Príklad. Matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3-x)^3$$

a algebraicky trojnásobné vlastné číslo $x_{1,2,3} = 3$. K nemu príslušné vlastné vektory nájdeme riešením homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podpriestor riešení je dvojrozmerný, generovaný (napríklad) vektormi $\boldsymbol{u} = (2, -1, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)^T$. Teda geometrická násobnosť vlastného čísla 3 je 2, takže k nemu budú prislúchať dva reťazce dĺžok 1 a 2. Keďže vopred nevieme, ku ktorému vlastnému vektoru $\boldsymbol{v}_1 \in [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ existuje vektor $\boldsymbol{v}_2$ taký, že $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v}_2$, musíme uvažovať ľubovoľnú lineárnu kombináciu $\boldsymbol{v}_1 = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (2a + b, -a, b)^T$, pričom parametre $a, b \in \mathbb{R}$ budeme voliť tak, aby sústava $(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ mala nejaké riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$. Úpravou jej rozšírenej matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & 2a + b \\ -2 & -4 & 2 & -a \\ 1 & 2 & -1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sústava má riešenie práve vtedy, keď $a = 2b$; volíme napr. $b = 1$, $a = 2$. Tomu zodpovedá $\boldsymbol{v}_1 = (5, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, 0)^T$. Za $\boldsymbol{v}_3$ možno zvoliť akýkoľvek vektor, ktorý spolu s $\boldsymbol{v}_1$ tvorí bázu vlastného podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}) = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$; vidíme, že vyhovujú obe voľby $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}$, resp. $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}$. Vyberme si napr. druhú možnosť $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 1)^T$.

Teda JKT matice $\boldsymbol{A}$ je

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(3), 3\big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a príslušná matica prechodu tvorená stĺpcami Jordanovej bázy $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ vyzerá (napr.) takto

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.2.4. Príklad. Matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$$

s jediným štvornásobným koreňom $x_{1\text{-}4} = 2$. Vlastné vektory nájdeme riešením homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podpriestor riešení je dvojrozmerný, generovaný vektormi $\boldsymbol{u} = (1, -1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{v} = (4, 0, -1, -5)^T$; všeobecné riešenie má tvar $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (a + 4b, -a, -b, -5b)^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Vidíme, že hľadaná báza bude pozostávať z dvoch reťazcov, nepoznáme však ich dĺžky – sú totiž dve možnosti zodpovedajúce rozkladom $4 = 1 + 3$, resp. $4 = 2 + 2$. Ďalšie vektory reťazcov získame riešením sústavy $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$ s rozšírenou maticou

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & -6 & -19 & -1 & a + 4b \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -b \\ 5 & 5 & 20 & 0 & -5b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4/5 & -4a/5 + 3b/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & a/5 - 2b/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ako vidno, sústava má riešenie pre ľubovoľné a, b; môžeme teda voliť $a = 1$, $b = 0$, čomu zodpovedá prvý reťazec $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} = (1, -1, 0, 0)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (-4/5, 0, 1/5, 0)^T$, resp. $a = 0$, $b = 1$, čomu zodpovedá druhý reťazec $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} = (4, 0, -1, -5)^T$, $\boldsymbol{v}_2 = (3/5, 0, -2/5, 0)^T$.

JKT matice $\boldsymbol{A}$ teda je

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_2(2), \boldsymbol{J}_2(2)\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

a príslušná Jordanova báza $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ je tvorená stĺpcami matice prechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 4 & 3/5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

20.2.5. Príklad. Uvažujme maticu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Jej charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^4$$

má jeden štvornásobný koreň $x_{1\text{-}4} = 0$. Vlastné vektory dostaneme ako riešenia homogénnej sústavy s maticou

$$\boldsymbol{A} - 0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podpriestor riešení je dvojrozmerný, generovaný vektormi $\boldsymbol{u} = (1,0,-1,0)^T$, $\boldsymbol{v} = (1,0,0,-1)^T$; všeobecné riešenie má tvar $a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = (a+b, 0, -a, -b)^T$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Takže hľadaná báza bude opäť pozostávať z dvoch reťazcov dĺžok $1+3$ alebo $2+2$. Ďalšie vektory reťazcov získame riešením sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ úpravou jej rozšírenej matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -a \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sústava má riešenie práve vtedy, keď $2a + b = 0$. Z toho je jasné, že dĺžky hľadaných reťazcov budú 1 a 3. Zvolíme napr. $a = -1$, $b = 2$. Dostaneme tak prvý vektor trojčlenného reťazca $\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = (1,0,1,-2)^T$. Druhý vektor zatiaľ ponecháme v tvare všeobecného riešenia $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x} = (c+d, 1, -c, -d)^T$ sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1$ a parametre $c, d \in \mathbb{R}$ budeme voliť tak, aby existovalo nejaké riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_3$ sústavy $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$. Úpravou jej rozšírenej matice dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -c \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2c-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Sústava má riešenie práve vtedy, keď $1+2c+d = 0$; zvoľme napr. $c = 0$, $d = -1$. Tomu zodpovedá $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,0,1)^T$ a (napr.) $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,0,0)^T$. Jediný vektor druhého reťazca zvolíme tak, aby spolu s vektorom $\boldsymbol{v}_1$ tvorili bázu vlastného podpriestoru $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$; vyhovuje každý z vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Zvoľme napr. $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u} = (1,0,-1,0)^T$.

JKT matice $\boldsymbol{A}$ teda je

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_3(0), 0\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a príslušná matica prechodu, tvorená stĺpcami Jordanovej bázy $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$, vyzerá takto:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

20.3. Prípad viacnásobného komplexného vlastného čísla

V predchádzajúcom paragrafe sme sa úmyselne vyhli tak komplexným maticiam, ako aj reálnym maticiam s komplexnými vlastnými číslami. Viedla nás k tomu skôr pohodlnosť, než nejaké zásadné dôvody. Jednoducho sme sa snažili sústrediť len na samotnú úpravu matice na JKT a nechceli si zbytočne komplikovať život z tohto hľadiska nepodstatnými detailmi komplexnej aritmetiky. Úprava komplexných matíc (v ktorých sú už zahrnuté i reálne matice s komplexnými vlastnými hodnotami) na JKT sa od reálneho prípadu nijako zásadne nelíši. Len výsledná Jordanova matica môže mať na diagonále komplexné vlastné hodnoty a taktiež v príslušnej Jordanovej báze sa môžu objaviť komplexné vektory.

Z hľadiska aplikácií JKT najmä na riešenie diferenciálnych rovníc je však dôležité vedieť nahradiť komplexný JKT nejakej reálnej matice vhodným *reálnym* kanonickým tvarom, podobným s pôvodnou maticou prostredníctvom *reálnej* matice prechodu. To možno dosiahnuť rozvinutím už známych metód z paragrafu 19.5. Z toho dôvodu si dovolíme celý postup len stručne opísať a overenie detailov prenechať čitateľovi.

Ak $\lambda = a + \mathrm{i}b$ je komplexné vlastné číslo matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tak aj $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$ je jej vlastné číslo, pričom λ a $\overline{\lambda}$ majú rovnakú algebraickú i geometrickú násobnosť. Ak navyše $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)$ je časť Jordanovej bázy prislúchajúca k λ, zložená s reťazcov dĺžok $m_1 + \ldots + m_l = m$, tak $\overline{\boldsymbol{\gamma}} = (\overline{\boldsymbol{w}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{w}}_m)$ je časť Jordanovej bázy prislúchajúca k $\overline{\lambda}$, zložená v zodpovedajúcom poradí z komplexne združených reťazcov rovnakých dĺžok.

Z toho mimochodom vyplýva, že aj keby sme sa neusilovali o elimináciu komplexných čísel z JKT, možno vzťah medzi λ a $\overline{\lambda}$ a k nim prislušnými bázami výhodne využiť: stačí nájsť príslušnú časť Jordanovej bázy len pre jednu z vlastných hodnôt λ, $\overline{\lambda}$ – zodpovedajúcu časť bázy pre druhú vlastnú hodnotu už možno dostať čiste mechanicky „opruhovaním“. Podčiarkujeme však, že také niečo funguje len pre *reálne* a nie všeobecne pre komplexné matice.

Vráťme sa však k pôvodnej otázke. Pre $n \geq 1$ a $a, b \in \mathbb{R}$ označme

$$\boldsymbol{J}_n\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & a & -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

reálnu maticu rozmeru $2n\times 2n$, vytvorenú z n diagonálne umiestnených blokov $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ a $n-1$ blokov $\boldsymbol{I}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ vedľa nich. Matice tvaru $\boldsymbol{J}_n\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ nazývame *zovšeobecnenými Jordanovými bunkami.*

Práve zovšeobecnená Jordanova bunka $\boldsymbol{J}_m\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ je tá reálna matica, ktorou možno v komplexnom JKT reálnej matice $\boldsymbol{A}$ nahradiť dvojicu Jordanových blokov $\boldsymbol{J}_m(\lambda)$,

$\boldsymbol{J}_m(\overline{\lambda})$ prislúchajúcich kopmlexne združeným vlastným číslam $\lambda = a + \mathrm{i}b$, $\overline{\lambda} = a - \mathrm{i}b$ s nenulovým b. Presnejšie, ak $\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)$ je reťazec (komplexných) vektorov zodpovedajúci v príslušnej Jordanovej báze bloku $\boldsymbol{J}_m(\lambda)$, tak reálne vektory

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_1 + \overline{\boldsymbol{w}}_1), & \boldsymbol{v}_1 &= -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{\boldsymbol{w}}_1 - \boldsymbol{w}_1),\\
\boldsymbol{u}_2 &= \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_2 + \overline{\boldsymbol{w}}_2), & \boldsymbol{v}_2 &= -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{\boldsymbol{w}}_2 - \boldsymbol{w}_2),\\
&\vdots & &\vdots\\
\boldsymbol{u}_m &= \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_m = \frac{1}{2}(\boldsymbol{w}_m + \overline{\boldsymbol{w}}_m), & \boldsymbol{v}_m &= -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_m = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\overline{\boldsymbol{w}}_m - \boldsymbol{w}_m),
\end{aligned}$$

tvoria úsek bázy $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{v}_m)$ zodpovedajúci bloku $\boldsymbol{J}_m\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a\end{smallmatrix}\right)$.

Ak teda v komplexnom JKT $\boldsymbol{J}$ štvorcovej reálnej matice $\boldsymbol{A}$ necháme reálne Jordanove bloky a im zodpovedajúce reťazce Jordanovej bázy na pokoji, ďalej každú dvojicu Jordanových blokov $\boldsymbol{J}_m(\lambda)$, $\boldsymbol{J}_m(\overline{\lambda})$ prislúchajúcich komplexne združeným imaginárnym vlastným hodnotám λ, $\overline{\lambda}$ nahradíme blokom $\boldsymbol{J}_m\left(\begin{smallmatrix} \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda \\ \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda\end{smallmatrix}\right)$ a k nim zodpovedajúce reťazce $(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m)$, $(\overline{\boldsymbol{w}}_1, \dots, \overline{\boldsymbol{w}}_m)$ Jordanovej bázy nahradíme úsekom $(\operatorname{Re}\boldsymbol{w}_1, -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_1, \dots, \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_m, -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_m)$, získame tak zovšeobecnenú Jordanovu maticu $\boldsymbol{J}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a *reálnu* maticu prechodu $\boldsymbol{Q}$ (ktorej stĺpce sú vektory novej bázy) takú, že $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{Q}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}$.

20.3.1. Príklad. Reálna matica

$$\begin{pmatrix}
5 & -5 & 5 & -4 & 4 & -2\\
5 & -5 & 7 & -7 & 8 & -4\\
5 & -8 & 12 & -12 & 13 & -6\\
5 & -9 & 12 & -12 & 15 & -7\\
5 & -9 & 12 & -15 & 20 & -9\\
5 & -9 & 12 & -16 & 20 & -8
\end{pmatrix}$$

má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = x^6 - 12x^5 + 63x^4 - 184x^3 + 315x^2 - 300x + 125 = (x^2 - 4x + 5)^3,$$

s dvoma trojnásobnými komplexne združenými koreňmi $x_{1,2,3} = 2 + \mathrm{i}$ a $x_{3,4,5} = \overline{x}_{1,2,3} = 2 - \mathrm{i}$. Vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu $2 + \mathrm{i}$ nájdeme ako riešenie homogénnej sústavy s maticou $\boldsymbol{A} - (2+\mathrm{i})\boldsymbol{I}$. Podpriestor riešení je jednorozmerný, generovaný vektorom $\boldsymbol{w}_1 = (3 + \mathrm{i}, 5, 5, 5, 5, 5)^T$. Vlastnej hodnote $2 + \mathrm{i}$ tak zodpovedá jediný reťazec dĺžky 3. Ďalší vektor reťazca nájdeme ako riešenie sústavy $(\boldsymbol{A} - (2+\mathrm{i})\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1$; vyhovuje $\boldsymbol{w}_2 = (-16/5 - 12\mathrm{i}/5, -5, -2 + \mathrm{i}, 0, 0, 0)^T$. Konečne tretí vektor dostaneme ako riešenie sústavy $(\boldsymbol{A} - (2+\mathrm{i})\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_2$; teda napr. $\boldsymbol{w}_3 = (-8/25 + 44\mathrm{i}/25, 0, -16/5 - 12\mathrm{i}/5, -5, -2 + \mathrm{i}, 0)^T$.

Komplexný JKT matice $\boldsymbol{A}$ teda je

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{J}_3(2+\mathrm{i}), \boldsymbol{J}_3(2-\mathrm{i})) = \begin{pmatrix}
2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2+\mathrm{i} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2-\mathrm{i} & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2-\mathrm{i} & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\mathrm{i}
\end{pmatrix}$$

a stĺpce príslušnej (komplexnej) matice prechodu (ktorú nevypisujeme z typografických dôvodov) tvoria vektory Jordanovej bázy $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \overline{\boldsymbol{w}}_1, \overline{\boldsymbol{w}}_2, \overline{\boldsymbol{w}}_3)$.

Zovšeobecnený reálny JKT matice $\boldsymbol{A}$ už z toho možno dostať okamžite:

$$\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}_3\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{pmatrix},$$

rovnako ako maticu prechodu

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix}
3 & -1 & -16/5 & 12/5 & -8/25 & -44/25\\
5 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0\\
5 & 0 & -2 & -1 & -16/5 & 12/5\\
5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0\\
5 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},$$

tvorenú vektormi bázy $(\operatorname{Re}\boldsymbol{w}_1, -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_1, \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_2, -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_2, \operatorname{Re}\boldsymbol{w}_3, -\operatorname{Im}\boldsymbol{w}_3)$.

V prípade zložitejšej štruktúry reťazcov prislúchajúcich komplexným vlastným hodnotám sa však už situácia stáva dosť neprehľadnou.

*20.4. Rozklad na koreňové podpriestory

Nech V je vektorový priestor nad poľom K, $\varphi\colon V \to V$ je lineárny operátor a $\lambda \in K$ je jeho vlastná hodnota. Hovoríme, že vektor $\boldsymbol{v} \in V$ je ***koreňový vektor*** lineárneho operátora φ prislúchajúci k jeho vlastnej hodnote λ, ak existuje prirodzené číslo k také, že $(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Najmenšie k s touto vlastnosťou nazývame ***rádom koreňového vektora*** $\boldsymbol{v}$ vzhľadom na φ.

Zafixujme na oba paragrafy 20.4 a 20.5 vektorový priestor V konečnej dimenzie n a lineárnu transformáciu $\varphi\colon V \to V$. Pre $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$ označme

$$\operatorname{Ker}_\lambda^k = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda)^k = \{\boldsymbol{v} \in V;\ (\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

lineárne podpriestory priestoru V. Zrejme platí

$$\{\boldsymbol{0}\} = \operatorname{Ker}_\lambda^0 \subseteq \operatorname{Ker}_\lambda^1 \subseteq \operatorname{Ker}_\lambda^2 \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Ker}_\lambda^k \subseteq \operatorname{Ker}_\lambda^{k+1} \subseteq \ldots,$$

a $\boldsymbol{v} \in V$ je koreňovým vektorom φ prislúchajúcim k λ práve vtedy, keď $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}_\lambda^k$ pre nejaké k. Keďže V je konečnorozmerný, uvedené inklúzie nemôžu byť všetky ostré, lebo inak by dimenzie podpriestorov $\operatorname{Ker}_\lambda^k \subseteq V$ rástli nad všetky medze. Preto existuje najmenšie také $r \in \mathbb{N}$ (závislé na λ), pre ktoré platí

$$\operatorname{Ker}_\lambda^r = \operatorname{Ker}_\lambda^{r+1};$$

potom už $\operatorname{Ker}_\lambda^r = \operatorname{Ker}_\lambda^k$ pre všetky $k \geq r$. Prirodzené číslo $r = r_\lambda$ nazývame ***rádom vlastnej hodnoty*** λ lineárnej transformácie φ. Lineárny podpriestor $\operatorname{Ker}_\lambda^r \subseteq V$ značíme

Ker_λ a nazývame ho ***koreňovým podpriestorom*** operátora φ prislúchajúcim k vlastnej hodnote λ. Teda $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}_\lambda$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{v}$ je koreňový vektor φ vzhľadom na λ.

Podobným spôsobom označme

$$\mathrm{Im}_\lambda^k = \mathrm{Im}(\varphi - \lambda)^k = \left\{(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{u});\ \boldsymbol{u} \in V\right\}$$

členy postupnosti lineárnych podpriestorov

$$V = \mathrm{Im}_\lambda^0 \supseteq \mathrm{Im}_\lambda^1 \supseteq \mathrm{Im}_\lambda^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{Im}_\lambda^k \supseteq \mathrm{Im}_\lambda^{k+1} \supseteq \ldots$$

priestoru V. Podľa vety 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu pre každé k platí

$$\dim \mathrm{Ker}_\lambda^k + \dim \mathrm{Im}_\lambda^k = n.$$

Z toho vyplýva, že dimenzie podpriestorov Ker_λ^k prestanú rásť v tej istej chvíli, keď dimenzie podpriestorov Im_λ^k prestanú klesať. Preto $r = r_\lambda$ je taktiež najmenšie prirodzené číslo s vlastnosťou $\mathrm{Im}_\lambda^r = \mathrm{Im}_\lambda^{r+1}$. Položme $\mathrm{Im}_\lambda = \mathrm{Im}_\lambda^r$.

20.4.1. Lema. *Nech λ je vlastná hodnota operátora φ. Potom pre každé $k \in \mathbb{N}$ sú Ker_λ^k aj Im_λ^k invariantné podpriestory*

$$V = \mathrm{Ker}_\lambda \oplus \mathrm{Im}_\lambda,$$

t. j. V je priamym súčtom invariantných podpriestorov Ker_λ a Im_λ.

Dôkaz. Pre $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi - \lambda)(\boldsymbol{x}) + \lambda\boldsymbol{x}$$

Preto pre $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}_\lambda^k$ máme $(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, a následne

$$(\varphi - \lambda)^k(\varphi\boldsymbol{x}) = (\varphi - \lambda)^{k+1}(\boldsymbol{x}) + \lambda(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

teda $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Ker}_\lambda^k$. Podobne, ak $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}_\lambda^k$, tak $\boldsymbol{x} = (\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{y})$ pre nejaké $\boldsymbol{y} \in V$. Potom

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = (\varphi - \lambda)^{k+1}(\boldsymbol{y}) + \lambda(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{y}) \in \mathrm{Im}_\lambda^k.$$

To dokazuje invariantnosť uvedených podpriestorov, špeciálne invariantnosť podpriestorov $\mathrm{Ker}_\lambda = \mathrm{Ker}_\lambda^r$ a $\mathrm{Im}_\lambda = \mathrm{Im}_\lambda^r$.

Keďže $(\varphi - \lambda)^k(\mathrm{Im}_\lambda) = \mathrm{Im}_\lambda$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$, hodnosť lineárneho operátora $(\varphi - \lambda)^r \restriction \mathrm{Im}_\lambda\colon \mathrm{Im}_\lambda \to \mathrm{Im}_\lambda$ sa rovná dimenzii podpriestoru Im_λ. Preto podľa dôsledku 6.2.4 je to injektívny operátor a

$$\mathrm{Ker}_\lambda \cap \mathrm{Im}_\lambda = \mathrm{Ker}\big((\varphi - \lambda)^r \restriction \mathrm{Im}_\lambda\big) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

Nakoľko súčet dimenzií oboch podpriestorov je n, z toho plynie $V = \mathrm{Ker}_\lambda \oplus \mathrm{Im}_\lambda$.

20.4.2. Lema. *Nech $\lambda \neq \mu$ sú vlastné hodnoty lineárneho operátora φ. Potom*

(a) Ker_λ *je invariantný podpriestor operátora $\varphi - \mu$;*
(b) *lineárny operátor $(\varphi - \mu) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda\colon \mathrm{Ker}_\lambda \to \mathrm{Ker}_\lambda$ je bijektívny;*
(c) $\mathrm{Ker}_\lambda \subseteq \mathrm{Im}_\mu$.

Dôkaz. (a) Nech $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}_\lambda$, t. j. $(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ pre nejaké k. Označme $\boldsymbol{v} = (\varphi - \mu)(\boldsymbol{u})$. Potom

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{v}) &= (\varphi - \lambda)^k(\varphi - \lambda + \lambda - \mu)(\boldsymbol{u})\\ &= (\varphi - \lambda)^{k+1}(\boldsymbol{u}) + (\lambda - \mu)(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

teda tiež $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}_\lambda$.

(b) Nech $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\big((\varphi - \mu) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda\big) = \mathrm{Ker}(\varphi - \mu) \cap \mathrm{Ker}_\lambda$. Potom $(\varphi - \mu)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ a

$$(\varphi - \lambda)(\boldsymbol{u}) = (\varphi - \mu)(\boldsymbol{u}) + (\mu - \lambda)(\boldsymbol{u}) = (\mu - \lambda)(\boldsymbol{u}),$$

teda $(\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{u}) = (\mu - \lambda)^k(\boldsymbol{u})$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Pre $k = r_\lambda$ dostávame

$$\boldsymbol{0} = (\varphi - \lambda)^k(\boldsymbol{u}) = (\mu - \lambda)(\boldsymbol{u}).$$

Keďže $\lambda \neq \mu$, vyplýva z toho $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Teda $\mathrm{Ker}\big((\varphi - \mu) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda\big) = \{\boldsymbol{0}\}$ a podľa dôsledku 6.2.4 je $(\varphi - \mu) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda$ bijektívny lineárny operátor.

(c) Označme $\psi = (\varphi - \mu) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda$. Z (b) vyplýva, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ je lineárny operátor $\psi^k\colon \mathrm{Ker}_\lambda \to \mathrm{Ker}_\lambda$ bijektívny, teda pre $k = r_\mu$ dostávame

$$\mathrm{Ker}_\lambda = \psi^k(\mathrm{Ker}_\lambda) \subseteq \psi^k(V) = \mathrm{Im}_\mu.$$

20.4.3. Tvrdenie. *Nech φ má nad poľom K spektrum $\mathrm{Spec}\,\varphi = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ plnej algebraickej váhy n, pričom $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre $i \neq j$. Potom*

$$V = \mathrm{Ker}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}_{\lambda_k},$$

t. j. V je priamym súčtom koreňových podpriestorov Ker_{λ_i} prislúchajúcich jednotlivým vlastným hodnotám. Navyše, dimenzia každého koreňového podpriestoru Ker_{λ_i} sa rovná algebraickej násobnosti príslušnej vlastnej hodnoty λ_i.

Dôkaz. Dôkaz prvej časti vykonáme indukciou podľa počtu prvkov spektra k. Pre $k = 1$ tvrdenie triviálne platí. Nech teda $k \geq 2$ a predpokladajme, že tvrdenie platí pre lineárne operátory, ktorých spektrum má menej než k prvkov. Podľa lemy 2.4.1 možno V rozložiť na priamy súčet invariantných podpriestorov

$$V = \mathrm{Ker}_{\lambda_k} \oplus \mathrm{Im}_{\lambda_k}.$$

Na základe lemy 19.1.1 ľahko nahliadneme rovnosť $\mathrm{Spec}(\varphi \restriction \mathrm{Im}_{\lambda_k}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\}$. Podľa indukčného predpokladu Im_{λ_k} možno rozložiť na priamy súčet koreňových podpriestorov operátora $\varphi \restriction \mathrm{Im}_{\lambda_k}$. Tento rozklad má očividne tvar

$$\mathrm{Im}_{\lambda_k} = (\mathrm{Ker}_{\lambda_1} \cap \mathrm{Im}_{\lambda_k}) \oplus \ldots \oplus (\mathrm{Ker}_{\lambda_{k-1}} \cap \mathrm{Im}_{\lambda_k}) = \mathrm{Ker}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}_{\lambda_{k-1}},$$

keďže podľa lemy 20.4.2 (c) pre $i < k$ platí $\mathrm{Ker}_{\lambda_i} \cap \mathrm{Im}_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$. Z toho už dostávame požadovaný rozklad

$$V = \mathrm{Im}_{\lambda_k} \oplus \mathrm{Ker}_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}_{\lambda_{k-1}} \oplus \mathrm{Ker}_{\lambda_k}.$$

Rovnosť algebraickej násobnosti vlastnej hodnoty λ_i a dimenzie koreňového podpriestoru Ker_{λ_i} je dôsledkom uvedeného rozkladu a lemy 19.1.1. Podľa nich má totiž charakteristický polynóm operátora φ tvar

$$\mathrm{ch}_\varphi(x) = \mathrm{ch}_{\varphi_1}(x) \ldots \mathrm{ch}_{\varphi_k}(x),$$

kde $\varphi_i = \varphi \restriction \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$. Na druhej strane, keďže $\mathrm{Spec}\,\varphi$ má plnú algebraickú váhu,

$$\mathrm{ch}_\varphi(x) = (\lambda_1 - x)^{m_i} \ldots (\lambda_k - x)^{m_k},$$

kde m_i je algebraická násobnosť λ_i. Nakoľko ch_{φ_i} je mocninou lineárneho faktora $\lambda_i - x$ a hodnoty λ_i sú navzájom rôzne, je $\mathrm{ch}_{\varphi_i}(x) = (\lambda_i - x)^{m_i}$ a $m_i = \dim \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$.

*20.5. Nilpotentné operátory

Zúženie $\varphi_\lambda = (\varphi - \lambda) \restriction \mathrm{Ker}_\lambda$ lineárneho operátora $\varphi - \lambda$ na koreňový podpriestor Ker_λ lineárneho operátora φ vyhovuje podmienke $\varphi_\lambda^r = \mathbf{0}$, kde $r = r_\lambda$ je rád príslušnej vlastnej hodnoty λ a $\mathbf{0}\colon \mathrm{Ker}_\lambda \to \mathrm{Ker}_\lambda$ je identicky nulový lineárny operátor.

Hovoríme, že *lineárny operátor* $\varphi\colon V \to V$ je *nilpotentný*, ak pre niektoré prirodzené číslo r platí $\varphi^r = \mathbf{0}$. Najmenšie takéto r, t. j. vlastne rád vlastnej hodnoty 0 operátora φ, nazývame *rádom nilpotentného operátora*.

Celkom analogicky možno definovať aj pojem *nilpotentnej matice*. Príkladom nilpotentných matíc sú Jordanove bunky $\boldsymbol{J}_n$; platí totiž $\boldsymbol{J}_n^n = \mathbf{0}$. Keďže $\boldsymbol{J}_n^{n-1} \neq \mathbf{0}$, n je priamo rádom nilpotentnej matice $\boldsymbol{J}_n$.

Spektrum nilpotentného operátora $\varphi\colon V \to V$ zrejme pozostáva z jedinej vlastnej hodnoty 0; spektrum posunutého operátora $\varphi + \lambda$, daného predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) + \lambda\boldsymbol{x}$, potom pozostáva z jediného skalára λ. Pritom spektrá oboch operátorov majú plnú algebraickú váhu rovnú $\dim V$.

V predchádzajúcom paragrafe sme vlastne ukázali, že každý lineárny operátor φ na konečnorozmernom vektorovom priestore V s k-prvkovým spektrom $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ plnej algebraickej váhy $n = \dim V$ možno rozložiť na priamy súčet vhodne posunutých nilpotentných operátorov. Presnejšie, ak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_k$ je (jednoznačne určený) rozklad vektora $\boldsymbol{x} \in V$ na zložky $\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$, tak

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + \varphi(\boldsymbol{x}_k) = (\varphi_{\lambda_1} + \lambda_1)(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + (\varphi_{\lambda_k} + \lambda_1)(\boldsymbol{x}_k)$$

je rozklad vektora $\varphi(\boldsymbol{x})$ na zložky $\varphi(\boldsymbol{x}_i) = (\varphi_{\lambda_i} + \lambda_i)(\boldsymbol{x}_i) \in \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$, pričom jednotlivé operátory $\varphi_{\lambda_i}\colon \mathrm{Ker}_{\lambda_i} \to \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$ sú nilpotentné.

Na dovŕšenie dôkazu viet 20.1.1 a 20.1.2 o JKT tak v podstate stačí dokázať prvú z nich pre nilpotentné lineárne operátory. Ak sú totiž $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k$ Jordanove bázy nilpotentných operátorov $\varphi_{\lambda_1}, \ldots, \varphi_{\lambda_k}$, t. j. operátor φ_{λ_i} má vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\beta}_i$ koreňového podpriestoru Ker_{λ_i} maticu v JKT

$$(\varphi_{\lambda_i})_{\boldsymbol{\beta}_i} = \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_{i1}}, \ldots, \boldsymbol{J}_{n_{iq_i}}\big),$$

tak φ má vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_k)$ priestoru V, ktorá vznikne ich spojením, maticu

$$\begin{aligned}(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} &= \mathrm{diag}\big((\varphi_{\lambda_1} + \lambda_1)_{\boldsymbol{\beta}_1}, \ldots, (\varphi_{\lambda_k} + \lambda_k)_{\boldsymbol{\beta}_k}\big)\\ &= \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_{n_{11}}(\lambda_1), \ldots, \boldsymbol{J}_{n_{1q_1}}(\lambda_1), \ldots\ldots, \boldsymbol{J}_{n_{k1}}(\lambda_k), \ldots, \boldsymbol{J}_{n_{kq_k}}(\lambda_k)\big),\end{aligned}$$

a tá je opäť v JKT.

20.5.1. Tvrdenie. *Nech $\varphi\colon V \to V$ je nilpotentný lineárny operátor rádu r. Potom existujú prirodzené čísla $l_1, \ldots, l_r$ také, že $\sum_{p=1}^r p\,l_p = n$, a vektory $\boldsymbol{u}_{pj} \in V$ rádu p také, že všetkých n vektorov $\varphi^i(\boldsymbol{u}_{pj})$, kde $1 \leq p \leq r$, $1 \leq j \leq l_p$, $0 \leq i \leq p-1$, je lineárne nezávislých, teda dohromady tvoria bázu priestoru V.*

Najprv niekoľko poznámok k zneniu tvrdenia. Pre pevné $1 \leq p \leq r$, $1 \leq j \leq l_p$ zakaždým dostávame reťazec

$$\varphi\colon \boldsymbol{u}_{pj} \mapsto \varphi(\boldsymbol{u}_{pj}) \mapsto \ldots \mapsto \varphi^{p-2}(\boldsymbol{u}_p j) \mapsto \varphi^{p-1}(\boldsymbol{u}_{pj}) \mapsto \mathbf{0}.$$

Ak pre $1 \leq i \leq p$ položíme $\boldsymbol{v}_{pj}^i = \varphi^{p-i}(\boldsymbol{u}_{pj})$, t.j. očíslujeme vektory sprava doľava, prejde tento reťazec na tvar

$$\varphi\colon \boldsymbol{v}_{pj}^p \mapsto \boldsymbol{v}_{pj}^{p-1} \mapsto \ldots \mapsto \boldsymbol{v}_{pj}^2 \mapsto \boldsymbol{v}_{pj}^1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Spojením jednotlivých reťazcov $\boldsymbol{\beta}_{pj} = \big(\boldsymbol{v}_{pj}^1, \ldots, \boldsymbol{v}_{pj}^p\big)$, dohromady dostaneme Jordanovu bázu

$$\boldsymbol{\beta} = \big(\boldsymbol{\beta}_{r1}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{rl_r}, \boldsymbol{\beta}_{r-11}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{r-1l_{r-1}}, \ldots\ldots, \boldsymbol{\beta}_{21}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{2l_2}, \boldsymbol{\beta}_{11}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{1l_1}\big)$$

operátora φ. Matica φ vzhľadom na ňu má tvar

$$\begin{aligned}(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} &= \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_r, \ldots, \boldsymbol{J}_r, \boldsymbol{J}_{r-1}, \ldots, \boldsymbol{J}_{r-1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{J}_2, \ldots, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_1, \ldots, \boldsymbol{J}_1\big)\\ &= \mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_r, \ldots, \boldsymbol{J}_r, \boldsymbol{J}_{r-1}, \ldots, \boldsymbol{J}_{r-1}, \ldots\ldots, \boldsymbol{J}_2, \ldots, \boldsymbol{J}_2, 0, \ldots, 0\big),\end{aligned}$$

v ktorom sa Jordanov blok $\boldsymbol{J}_p$ vyskytuje práve l_p-krát. Pritom nevylučujeme ani možnosť $l_p = 0$; vtedy sa v JKT matice operátora φ Jordanov blok $\boldsymbol{J}_p$ nevyskytuje.

Reťazcovú štruktúru Jordanovej bázy $\boldsymbol{\beta}$ možno vo všeobecnosti znázorniť schémou:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
r & & r-1 & & & & 2 & & 1 & & & \\
\bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \ldots & \mapsto & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & l_r \\
\bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \ldots & \mapsto & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & \bullet & \mapsto & \ldots & \mapsto & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & l_{r-1} \\
 & & \bullet & \mapsto & \ldots & \mapsto & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & l_2 \\
 & & & & & & \bullet & \mapsto & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & & & & & & & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} & \\
 & & & & & & & & \vdots & & \vdots & l_1 \\
 & & & & & & & & \bullet & \mapsto & \mathbf{0} &
\end{array}$$

kde znak • označuje jednotlivé bázické vektory a každá skupina je tvorená l_p reťazcami dĺžky p, pre $1 \le p \le r$. Čísla r, $r-1$, …, 2, 1 v záhlaví označujú rády v príslušných stĺpcoch – budeme ich jednoducho nazývať číslami týchto stĺpcov.

Napríklad zo schémy

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boldsymbol{t}_5 & \mapsto & \boldsymbol{t}_4 & \mapsto & \boldsymbol{t}_3 & \mapsto & \boldsymbol{t}_2 & \mapsto & \boldsymbol{t}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{u}_5 & \mapsto & \boldsymbol{u}_4 & \mapsto & \boldsymbol{u}_3 & \mapsto & \boldsymbol{u}_2 & \mapsto & \boldsymbol{u}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
 & & & & \boldsymbol{v}_3 & \mapsto & \boldsymbol{v}_2 & \mapsto & \boldsymbol{v}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
 & & & & & & \boldsymbol{w}_2 & \mapsto & \boldsymbol{w}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
 & & & & & & \boldsymbol{x}_2 & \mapsto & \boldsymbol{x}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
 & & & & & & \boldsymbol{y}_2 & \mapsto & \boldsymbol{y}_1 & \mapsto & \mathbf{0} \\
 & & & & & & & & \boldsymbol{z}_1 & \mapsto & \mathbf{0}
\end{array}$$

možno vyčítať, že lineárny operátor φ má v Jordanovej báze

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3, \boldsymbol{t}_4, \boldsymbol{t}_5, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4, \boldsymbol{u}_5, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_1)$$

maticu v JKT

$$\begin{aligned}(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} &= \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_5, \boldsymbol{J}_5, \boldsymbol{J}_3, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_1\big) \\ &= \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_5, \boldsymbol{J}_5, \boldsymbol{J}_3, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_2, 0\big)\end{aligned}$$

rozmeru 20×20. (Všimnite si, že $l_4 = 0$, teda Jordanov blok $\boldsymbol{J}_4$ sa v matici $(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ nevyskytuje.)

Pri dôkaze tvrdenia 20.5.1 budeme potrebovať niekoľko nových pojmov a pomocných výsledkov.

Nech S je lineárny podpriestor vektorového priestoru V. Hovoríme, že *vektory* $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$ sú *lineárne nezávislé vzhľadom na podpriestor* S, ak pre všetky skaláry $c_1, \dots, c_m \in K$ platí

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m \in S \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_m = 0.$$

Hovoríme, že vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ tvoria *bázu priestoru V vzhľadom na podpriestor S*, ak sú lineárne nezávislé vzhľadom na S a $V = S + [\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m]$. Zrejme $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$ sú lineárne nezávislé (tvoria bázu V) práve vtedy, keď sú lineárne nezávislé (tvoria bázu V) vzhľadom na podpriestor $\{\mathbf{0}\}$.

Jednoduchý dôkaz nasledujúcej lemy prenechávame ako cvičenie čitateľovi (porovnajte s dôkazmi viet 5.4.1 o dimenzii súčtu a prieniku podpriestorov a 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu).

20.5.2. Lema. *Nech $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor a $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ sú linerne nezávislé vzhľadom na S;
(ii) pre ľubovoľnú bázu $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ podpriestoru S vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ sú lineárne nezávislé;
(iii) existuje báza $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ podpriestoru S taká, že vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ sú lineárne nezávislé.

Na základe lemy 20.5.2 už ľahko odvodíme nasledujúce zovšeobecnenie vety 4.4.4.

20.5.3. Lema. *Nech $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor a vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$ sú nezávislé vzhľadom na V. Potom existujú $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l \in V$ také, že $l = \dim V - \dim S - m$ a vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l$ tvoria bázu priestoru V vzhľadom na S.*

Dôkaz. Stačí zvoliť ľubovoľnú bázu $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ podpriestoru S a lineárne nezávislý systém $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ doplniť vektormi $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_l$ na bázu V.

20.5.4. Lema. *Nech $S \subseteq T \subseteq V$ sú lineárne podpriestory také, že $\varphi^{-1}(S) \subseteq T$. Potom pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$ lineárne nezávislé vzhľadom na T vektory $\varphi(\boldsymbol{x}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{x}_m)$ sú lineárne nezávislé nad S.*

Dôkaz. Nech platí $c_1\varphi(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + c_m\varphi(\boldsymbol{x}_m) = \varphi(c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_m\boldsymbol{x}_m) \in S$. Potom $c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots c_m\boldsymbol{x}_m \in \varphi^{-1}(S) \subseteq T$ a z nezávislosti vektorov $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ nad T vyplýva $c_1 = \ldots = c_m = 0$, teda $\varphi(\boldsymbol{x}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{x}_m)$ sú nezávislé nad S.

Dôkaz tvrdenia 20.5.1. Operátor φ má jediné vlastné číslo $\lambda = 0$ a V je jeho jediný koreňový podpriestor. Využijúc označenie z predchádzajúceho paragrafu položme $S_p = \operatorname{Ker}_0^p = \operatorname{Ker}\varphi^p$ pre $0 \le p \le r$. Dostaneme tak ostro klesajúcu postupnosť lineárnych podpriestorov

$$V = S_r \supset S_{r-1} \supset \ldots \supset S_1 \supset S_0 = \{\mathbf{0}\}$$

usporiadanú inklúziou.

Hľadané vektory $\boldsymbol{u}_{pj}$, zostrojíme rekurziou v r krokoch, v ktorých postupne, zľava doprava, dopĺňame spodnú časť jednotlivých nenulových stĺpcov uvedenej „veľkej schémy“.

Vektory $\boldsymbol{u}_{r1}, \dots, \boldsymbol{u}_{rl_r} \in V$ vyberieme tak, aby tvorili bázu priestoru $V = S_r$ vzhľadom na podpriestor S_{r-1}.

Nech $r > p \ge 1$. Predpokladajme, že sme už zostrojili všetky stĺpce schémy s číslami r, $r-1, \dots, p+1$ a vektory každého stĺpca q, kde $r \ge q \ge p+1$, tvoria bázu priestoru S_q vzhľadom na jeho podpriestor S_{q-1}. Označme $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ vektory stĺpca $p+1$. Keďže $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$ sú nezávislé nad $S_p = \varphi^{-1}(S_{p-1})$, podľa lemy 20.5.4 sú vektory $\varphi(\boldsymbol{x}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{x}_m) \in S_p$ nezávislé nad S_{p-1}. Podľa (dôkazu) lemy 20.5.3 ich možno vhodnými vektormi $\boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{p\,l_p} \in S_p$ doplniť do bázy podpriestoru S_p vzhľadom na podpriestor S_{p-1}. Stĺpec p je potom tvorený vektormi $\varphi(\boldsymbol{x}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{x}_m), \boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{pl_p}$.

Na dokončenie dôkazu treba ešte overiť, že systém takto zostrojených vektorov $\boldsymbol{v}_{pj}^i = \varphi^{p-i}(\boldsymbol{u}_{pj})$, $1 \le p \le r$, $1 \le j \le l_p$, $1 \le i \le p$, naozaj tvorí bázu priestoru V.

Z konštrukcie vyplýva, že vektory v stĺpci 1 sú lineárne nezávislé. Nech teda $1 \le p \le r$ je najväčšie číslo také, že vektory v stĺpcoch $1, \dots, p$ sú lineárne nezávislé. Stačí ukázať rovnosť $p = r$. V opačnom prípade by vektory v stĺpcoch $1, \dots, p, p+1$ boli lineárne závislé. To by však znamenalo, že vektory v stĺpci $p+1$ sú lineárne závislé vzhľadom na podpriestor S_p (podrobne si rozmyslite prečo). Ale to odporuje podmienkam našej konštrukcie. Teda všetky vektory „veľkej schémy“ sú lineárne nezávislé.

Konečne ukážeme, že zostrojené vektory generujú celé V. Na to stačí overiť, že ich počet, ktorý je zrejme $\sum_{p=1}^{r} p\,l_p$, sa naozaj rovná $n = \dim V$. Pri konštrukcii p-teho stĺpca sme k φ-obrazom vektorov predošlého stĺpca vždy pridávali

$$l_p = \dim S_p - \dim S_{p-1} - \sum_{i=p+1}^{r} l_i$$

vektorov. Sčítaním uvedených rovností pre $1 \le p \le r$ dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{r} l_p &= \sum_{p=1}^{r}(\dim S_p - \dim S_{p-1}) - \sum_{p=1}^{r}\sum_{i=p+1}^{r} l_i \\ &= \dim S_r - \dim S_0 - \sum_{i=1}^{r}\sum_{p=1}^{i-1} l_i = n - \sum_{i=1}^{r}(i-1)\,l_i,\end{aligned}$$

teda $\sum_{p=1}^{r} p\,l_p = n$.

Dokončenie dôkazu viet 20.1.1 a 20.1.2 si už vyžaduje len ukázať jednoznačnosť Jordanovho kanonického tvaru.

Predovšetkým spektrum $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ lineárneho operátora φ (vrátane algebraických i geometrických násobností jednotlivých vlastných hodnôt), ako aj jeho koreňové podpriestory Ker_{λ_i} (a tým aj ich dimenzie r_{λ_i}) sú definované bez akéhokoľvek odkazu na maticu φ v nejakej báze. Zúženia $\varphi_{\lambda_i} = (\varphi - \lambda_i)\restriction \mathrm{Ker}_{\lambda_i}$ sú nilpotentné operátory. Takže stačí dokázať jednoznačnosť JKT matice nilpotentného operátora φ, t. j. vlastne počtov l_p jednotlivých reťazcov dĺžok p, $1 \le p \le r$. Ako sme však videli, tie sú definované rekurzívne pomocou dimenzií podpriestorov $S_p = \mathrm{Ker}_0^p$, ktoré opäť závisia len na operátore φ.

20.6. Ešte raz úprava na JKT

V tvrdeniach 20.4.3 a 20.5.1 je priamo obsiahnutý opis druhej metódy úpravy matice na JKT, pri ktorej budujeme reťazce Jordanovej bázy „zľava doprava". Keďže aj lineárny operátor na konečnorozmernom priestore býva väčšinou zadaný maticou v nejakej báze, možno návod očividným spôsobom aplikovať aj na tento prípad. Za predpokladu znalosti plného spektra matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ postupujeme podľa nasledujúcich bodov:

(1) Pre každé $\lambda \in \mathrm{Spec}\,\boldsymbol{A}$ osobitne vypočítame mocniny matice $\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ a každú z nich upravíme na redukovaný stupňovitý tvar. Dostávame tak postupnosť dvojíc matíc

$$\boldsymbol{A}_\lambda \sim \boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{A}_\lambda^2 \sim \boldsymbol{B}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{A}_\lambda^r \sim \boldsymbol{B}_r,\ \boldsymbol{A}_\lambda^{r+1} \sim \boldsymbol{B}_{r+1},$$

ktorú ukončíme, v prvom kroku $r = r_\lambda$ takom, že $\boldsymbol{B}_r = \boldsymbol{B}_{r+1}$. Potom podpriestor $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^r) = \mathcal{R}(\boldsymbol{B}_r)$ riešení homogénnej sústavy $\boldsymbol{A}_\lambda^r \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ je koreňový podpriestor matice $\boldsymbol{A}$ prislúchajúci k λ. Špeciálne, v prípade jednobodového spektra je $\boldsymbol{A}_\lambda$ nilpotentná a r je prvý krok, pre ktorý $\boldsymbol{A}_\lambda^r = \boldsymbol{0}$.

(2) Na základe každej z matíc $\boldsymbol{B}_p$, $1 \le p \le r$, nájdeme bázu podpriestoru riešení sústavy $\boldsymbol{A}_\lambda^p \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, ktorú zapíšeme ako stĺpce matice $\boldsymbol{C}_p$.

(3) Vektory $\boldsymbol{u}_{r1}, \dots, \boldsymbol{u}_{rl_r}$ ľavého, t. j. r-tého stĺpca „veľkej schémy" vyberieme zo stĺpcov matice $\boldsymbol{C}_r$ podľa vety 4.4.4 tak, aby dopĺňali bázu podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^{r-1})$, t. j. stĺpce matice $\boldsymbol{C}_{r-1}$, do bázy podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^r)$.

(4) Keď už máme zostrojené stĺpce $r, \dots, p+1$, kde $r > p \ge 1$, pričom stĺpec $p+1$ je tvorený vektormi $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m$, tak p-ty stĺpec bude pozostávať z vektorov $\boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_m$, $\boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{p\,l_p}$, pričom vektory $\boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{p\,l_p}$ získame tak,

že bázu $\boldsymbol{C}_{p-1}$ podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^{p-1})$ rozšírenú o vektory $\boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_m$ (ktoré, podľa lemy 20.5.4 tvoria spolu lineárne nezávislý systém) doplníme do bázy podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^p)$ vhodnými stĺpcami matice $\boldsymbol{C}_p$ podľa vety 4.4.4.

(5) Vlastnej hodnote λ potom zodpovedá Jordanova báza zložená z takto zostrojených reťazcov a matica v JKT

$$\mathrm{diag}\big(\boldsymbol{J}_r(\lambda), \dots, \boldsymbol{J}_r(\lambda), \dots\dots, \boldsymbol{J}_1(\lambda), \dots, \boldsymbol{J}_1(\lambda)\big)$$

s l_p blokmi $\boldsymbol{J}_p(\lambda)$.

(6) Nakoniec zoradíme vektory Jordanových báz pre jednotlivé vlastné hodnoty pekne za sebou a príslušné JKT blokovo diagonálne. Tým získame výslednú Jordanovu bázu (maticu prechodu) a JKT pôvodnej matice $\boldsymbol{A}$.

Poznámka. 1. S trochou skúsenosti a šikovnosti možno obe metódy úpravy na JKT výhodne kombinovať a budovať reťazce Jordanových báz zároveň zľava i sprava.

2. Nad nekonečným poľom K (najmä v typických prípadoch polí $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$) možno nové vektory $\boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{p\,l_p}$ v bodoch (3), (4) voliť v podstate náhodne. Treba si len vopred zistiť ich počet, t. j. $l_r = h(\boldsymbol{B}_{r-1}) - h(\boldsymbol{B}_r)$ a $l_p = h(\boldsymbol{B}_{p-1}) - h(\boldsymbol{B}_{p-1}) - m$ pre $r > p \ge 1$. Za predpokladu $l_p > 0$ je totiž nekonečne málo pravdepodobné, že pri skutočne náhodnej voľbe l_p vektorov z podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^p)$ budú vektory $\boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{A}_\lambda \cdot \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{u}_{p1}, \dots, \boldsymbol{u}_{p\,l_p}$ lineárne závislé vzhľadom na podpriestor $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^{p-1})$. Problémom však môže byť zvoliť vektory $\boldsymbol{u}_{pj}$ „naozaj náhodne". Často práve v snahe o to – spolu s mimovoľnou tendenciou voliť „čo najjednoduchšie" či „čo najkrajšie" vektory – môžeme nakoniec dostať vektory závislé nad $\mathcal{R}(\boldsymbol{A}_\lambda^{p-1})$. Podobne, ako je niekedy ťažké nakresliť „naozaj všeobecný" trojuholník.

20.6.1. Príklad. Matica

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

má charakteristický polynóm

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5 = (1-x)^5$$

a jediné vlstné číslo $x_{1\text{–}5} = 1$ s algebraickou násobnosťou 5.

Postupne vypočítame mocniny matice $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}$, ich redukované stupňovité tvary a bázy podpriestorov riešení sústav $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^p \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

fundamentálny systém riešení tvoria dva lineárne nezávislé vlastné vektory, ktoré zapíšeme ako stĺpce matice

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Druhá mocnina je

$$(A - \boldsymbol{I})^2 = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 & -12 & 12 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & -4 \\ -16 & 0 & 4 & -16 & 16 \\ -4 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ -12 & 0 & 3 & -12 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

s fundamentálnym systémom riešení tvoreným stĺpcami matice

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konečne $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^3 = \boldsymbol{0}$ (takže $\boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{C}_3 = \boldsymbol{I}$), a ďalšie mocniny už nemusíme počítať.

Keďže máme dva lineárne nezávislé vlastné vektory, Jordanova báza bude mať dva reťazce. Dlhší z nich bude mať dĺžku 3, teda ten kratší musí mať nutne dĺžku $5-3=2$.

Počiatočný vektor dlhšieho reťazca zvolíme tak, aby doplňal stĺpce matice $\boldsymbol{C}_2$ na bázu priestoru $\mathbb{R}^5 = \mathcal{R}\big((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^3\big)$; vyhovuje napr. $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,0,0,0)^T$. Druhý a tretí vektor reťazca potom sú $\boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{u}_3 = (-6,-3,-4,-1,-6)^T$, $\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = (-12,4,-16,-4,-12)^T$.

Počiatočný vektor kratšieho reťazca vyberieme spomedzi stĺpcov matice $\boldsymbol{C}_2$ tak, aby doplňal stĺpce matice $(\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{u}_2)$ na bázu priestoru $\mathcal{R}\big((\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})^2\big)$. Vyhovuje druhý stĺpec $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,4,0,0)^T$. Druhý vektor kratšieho reťazca potom je $\boldsymbol{v}_1 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v}_2 = (-2,1,-4,-1,-2)^T$.

Lineárne nezávislé vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1$ tvoria bázu vlastného podpriestoru $\mathcal{R}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})$, takže ďalej už nemusíme nič doplňať.

Jordanov tvar matice $\boldsymbol{A}$ teda je

$$\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}\big(\boldsymbol{J}_3(1), \boldsymbol{J}_2(1)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a stĺpce matice prechodu $\boldsymbol{P}$ tvoria vektory Jordanovej bázy $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, t. j.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -12 & -6 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & -4 & 0 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -12 & -6 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$