18. VLASTNÉ HODNOTY A VLASTNÉ VEKTORY

Touto kapitolou začíname najdôležitejšiu partiu nášho kurzu lineárnej algebry a geometrie. Jej ústredné pojmy ako *vlastná hodnota*, *vlastný vektor* a *spektrum lineárneho operátora* hrajú kľúčovú úlohu nielen v samotnej lineárnej algebre, ale aj v jej aplikáciách – či už v iných oblastiach matematiky, vo fyzike, i v ďalších disciplínach.

Po šiestich kapitolách, ktoré sa odohrávali nad poľom $\mathbb{R}$ prípadne $\mathbb{C}$, sa opäť vraciame k vektorovým priestorom nad ľubovoľným poľom K.

18.1. Matica lineárneho operátora a podobnosť matíc

Pripomeňme, že *lineárnym operátorom* na vektorovom priestore V alebo tiež *lineárnou transformáciou* priestoru V nazývame ľubovoľné lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to V$. Ak V je konečnorozmerný, tak lineárny operátor $\varphi\colon V \to V$ je injektívny práve vtedy, keď je surjektívny, čo je ekvivalentné s rovnosťou $h(\varphi) = \dim V$ (pozri dôsledok 6.2.4). Maticou lineárnej transformácie $\varphi\colon V \to V$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ nazývame maticu

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \big((\varphi\boldsymbol{u}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi\boldsymbol{u}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{n\times n},$$

tvorenú súradnicami obrazov $\varphi(\boldsymbol{u}_j)$ vektorov $\boldsymbol{u}_j$ bázy $\boldsymbol{\alpha}$ vzhľadom na *tú istú* bázu $\boldsymbol{\alpha}$.

Jedným z vedúcich zámerov tejto i nasledujúcich dvoch kapitol bude dosiahnuť vhodnou voľbou bázy $\boldsymbol{\alpha}$ čo najjednoduchší tvar matice $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}}$ lineárneho operátora φ. Poznamenajme, že pokiaľ by sme netrvali na prirodzenej požiadavke vyjadrovať súradnice vzorov aj obrazov vektorov $\boldsymbol{x} \in V$ vzhľadom na *tú istú bázu* priestoru V, šlo by o špeciálny prípad vety 7.6.4: vždy by sme mohli (navyše jednoduchým spôsobom) zvoliť bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V tak, aby matica φ vzhľadom na ne mala blokový tvar

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_h & \boldsymbol{0}_{h,n-h} \\ \boldsymbol{0}_{n-h,h} & \boldsymbol{0}_{n-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $h = h(\varphi)$. Niečo jednoduchšie si ťažko možno predstaviť – my by sme už tradične boli spokojní s diagonálnou maticou $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}}$. Zdanlivo nevinná požiadavka $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ však značne zužuje možnosti našej voľby, čo – ako uvidíme – dramaticky komplikuje situáciu.

Analogickú úlohu sme už riešili v kapitole 11 pre symetrické bilineárne formy; vtedy sa nám však podarilo ukázať, že (až na prípad polí charakteristiky 2) možno voľbou vhodnej bázy vždy dosiahnuť diagonálny tvar matice príslušnej formy. Poznamenajme už vopred, že pre lineárne operátory sa nám nič podobné nepodarí. Jednako preskúmame štruktúru lineárnych operátorov na konečnorozmerných vektorových priestoroch do takej miery, že dokážeme charakterizovať operátory diagonalizovateľné vo vhodnej báze ako aj identifikovať (ba čiastočne tiež odstrániť – ale to až v nasledujúcej kapitole) prekážky diagonalizovateľnosti u tých ostatných.

Na začiatok si uvedomme vzťah medzi maticami lineárneho operátora vzhľadom na rôzne bázy. Ako zvláštny prípad vety 7.6.1 dostávame:

18.1.1. Veta. *Nech $\varphi\colon V \to V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru V a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú jeho dve bázy. Potom*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Štvorcové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ sa nazývajú *podobné*, označenie $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$, ak existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ taká, že platí

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}.$$

Zrejme podobné matice majú rovnakú hodnosť. Čitateľ si iste sám bez ťažkostí overí, že pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \in K^{n\times n}$ platí

$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B} \ \&\ \boldsymbol{B} \approx \boldsymbol{C} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{C}.$$

To znamená, že vzťah podobnosti je *reflexívny*, *symetrický* a *tranzitívny*, čiže je to *ekvivalencia* na množine $K^{n\times n}$. Ekvivalencia podobnosti nám asi pripomína inú ekvivalenciu na množine $K^{n\times n}$: totiž kongruenciu matíc $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$, s ktorou ju však neslobodno zamieňať (pozri paragraf 11.3).

Keďže $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{P}^{-1}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ a každá regulárna matica je maticou prechodu medzi vhodnou dvojicou báz, nasledujúca veta je bezprostredným dôsledkom vety 18.1.1.

18.1.2. Veta. *Nech V je n-rozmerný vektorový priestor nad poľom K. Potom pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú maticami tej istej lineárnej transformácie $\varphi\colon V \to V$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) bázy priestoru V;*

(ii) *$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$.*

Stopu matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, označenie $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ (z anglického *trace*), definujeme ako súčet jej diagonálnych prvkov, t. j.

$$\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

18.1.3. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times m}$. Potom*

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}).$$

Dôkaz. Označme $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (c_{ij})_{m\times m}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = (d_{jk})_{n\times n}$. Jednoduchým výpočtom dostávame

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}).$$

Vety 10.3.2 a 10.3.3 o determinante súčinu matíc a determinante inverznej matice, resp. tvrdenie 18.1.3 majú nasledujúci bezprostredný

18.1.4. Dôsledok. *Podobné matice majú rovnaký determinant aj stopu.*

Hovoríme, že determinant a stopa sú *invariantmi podobnosti matíc*. Ak teda matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ majú rôzne determinanty alebo rôzne stopy (pričom najmä túto druhú podmienku možno veľmi ľahko nahliadnuť), tak nemôžu byť podobné. Na druhej strane však ani rovnosť determinantu a stopy ešte nezaručujú ich podobnosť.

18.2. Vlastné hodnoty a vlastné vektory lineárneho operátora a matice

Lineárny operátor $\varphi\colon V \to V$ na konečnorozmernom vektorovom priestore V sa nazýva *diagonalizovateľný*, ak existuje nejaká báza priestoru V, vzhľadom na ktorú má φ diagonálnu maticu.

Nech teda $\varphi\colon V \to V$ je diagonalizovateľný lineárny operátor a $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ je taká báza priestoru V, že matica $\boldsymbol{B} = (\varphi)_{\boldsymbol{\beta}}$ je diagonálna so skalármi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ na diagonále. Potom pre bázické vektory $\boldsymbol{v}_i$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i.$$

Ukazuje sa, že tento vzťah medzi lineárnym operátorom φ skalárom λ_i a vektorom $\boldsymbol{v}_i$ má kľúčový význam.

Vopred zdôrazňujeme, že nasledujúce dve definície sa vzťahujú rovnako na konečno- i nekonečnorozmerné vektorové priestory.

Hovoríme, že skalár $\lambda \in K$ je *vlastná* alebo tiež *charakteristická hodnota* lineárneho operátora $\varphi\colon V \to V$, ak existuje vektor $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$, pre ktorý platí $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. V prípade vektorových priestorov nad číselnými poľami, ako napr. $\mathbb{R}$ alebo $\mathbb{C}$, zvykneme hovoriť o *vlastnom čísle* lineárneho operátora.

Hovoríme, že $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V$ je *vlastný* alebo tiež *charakteristický vektor* lineárneho operátora $\varphi\colon V \to V$, ak existuje skalár $\lambda \in K$, pre ktorý platí $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. Ak V je vektorový priestor funkcií, zvykneme hovoriť o *vlastnej funkcii* lineárneho operátora.

Obe uvedené definície hovoria vlastne o tom istom. Ak $\lambda \in K$ je vlastná hodnota operátora φ, tak každý nenulový vektor $\boldsymbol{v} \in V$ taký, že $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$, je vlastný vektor operátora φ. Naopak, ak $\boldsymbol{v} \in V$ je vlastný vektor, tak skalár λ, pre ktorý platí $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$, je vlastná hodnota. Hovoríme, že $\boldsymbol{v}$ je *vlastný vektor prislúchajúci k vlastnej hodnote* λ, resp. že λ je *vlastná hodnota prislúchajúca k vlastnému vektoru* $\boldsymbol{v}$. Ešte si všimnite, že vlastná hodnota prislúchajúca k danému vlastnému vektoru je určená jednoznačne; na druhej strane, ako uvidíme, k danej vlastnej hodnote môže prislúchať viacero, dokonca lineárne nezávislých vektorov.

Vlastnou (charakteristickou) hodnotou (vlastným číslom), resp. vlastným (charakteristickým) vektorom štvorcovej matice $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ nazývame vlastnú hodnotu, resp. vlastný vektor lineárneho operátora $K^n \to K^n$ daného predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$. Vlastná hodnota $\lambda \in K$ a k nej prislúchajúci vlastný vektor $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in K^n$ matice $\boldsymbol{A}$ sú tak zviazané vzťahom $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.

Z tvrdenia 18.1.2 vyplýva, že vlastné hodnoty podobných matíc sú vlastnými hodnotami toho istého lineárneho operátora, preto

18.2.1. Tvrdenie. *Podobné matice majú rovnaké vlastné hodnoty.*

Jednorozmerný podpriestor $[\boldsymbol{v}]$ generovaný vlastným vektorom $\boldsymbol{v}$ lineárneho operátora je špeciálnym prípadom tzv. invariantného podpriestoru. Hovoríme, že lineárny podpriestor S vektorového priestoru V je *invariantným podpriestorom* lineárneho operátora $\varphi\colon V \to V$, ak platí $\varphi(S) \subseteq S$, t.j. $\varphi(\boldsymbol{x}) \in S$ pre každé $\boldsymbol{x} \in S$. Ak lineárny operátor φ je fixovaný kontextom, hovoríme jednoducho o invariantnom podpriestore.

Triviálny podpriestor $\{\boldsymbol{0}\}$ a nevlastný podpriestor V sú vždy invariantné. Zrejme jednorozmerný podpriestor $[\boldsymbol{v}]$ je invariantný práve vtedy, keď $\boldsymbol{v}$ je vlastný vektor príslušného operátora. Jednorozmerné podpriestory generované vlastnými vektormi

lineárneho operátora sú teda príkladmi netriviálnych, a ak $\dim V > 1$, tak i vlastných invariantných podpriestorov.

Ak S je invariantný podpriestor lineárnej transformácie $\varphi\colon V \to V$, tak zúženie lineárneho operátora φ na podpriestor S je opäť lineárnym operátorom $\varphi \restriction S\colon S \to S$ na vektorovom priestore S. Ak $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$ je báza priestoru V taká, že jej prvých k vektorov tvorí bázu invariantného podpriestoru S, tak matica φ v tejto báze má blokový tvar

$$\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{0}_{n-k,k} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{A}_1 \in K^{k \times k}$ je matica lineárnej transformácie $\varphi \restriction S\colon S \to S$ v báze $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ a $\boldsymbol{M} \in K^{k \times (n-k)}$, $\boldsymbol{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$.

Ak $V = S \oplus T$ je dokonca priamym súčtom invariantných podpriestorov S, T, tak V má bázu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, ktorej prvých k vektorov tvorí bázu S a zvyšných $n-k$ vektorov tvorí bázu T. Vzhľadom na takúto bázu má matica φ blokovo diagonálny tvar

$$\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}_{k,n-k} \\ \boldsymbol{0}_{n-k,k} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2),$$

kde $\boldsymbol{A}_1 \in K^{k \times k}$ je matica lineárnej transformácie $\varphi \restriction S\colon S \to S$ v báze $(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k)$ a $\boldsymbol{A}_2 \in K^{(n-k)\times(n-k)}$ je matica lineárnej transformácie $\varphi \restriction T\colon T \to T$ v báze $(\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n)$. Toto pozorovanie možno zrejmým spôsobom zovšeobecniť na priamy súčet ľubovoľného konečného počtu invariantných podpriestorov. (Detaily prenechávame na samostatné premyslenie čitateľovi.)

Z vykonaných úvah priamo vyplýva nasledujúca charakterizácia diagonalizovateľných lineárnych operátorov.

18.2.2. Veta. *Nech φ je lineárny operátor na konečnorozmernom vektorovom priestore V. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) *φ je diagonalizovateľný;*
(ii) *existuje báza priestoru V pozostávajúca z vlastných vektorov operátora φ;*
(ii) *V je priamym súčtom jednorozmerných invariantných podpriestorov lineárneho operátora φ.*

Samozrejme, matica operátora φ v báze vlastných vektorov $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ má tvar $(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, kde λ_i je vlastné hodnota prislúchajúca k vlastnému vektoru $\boldsymbol{v}_i$.

Podčiarkujeme, že nasledujúce tvrdenie platí aj bez predpokladu konečnorozmernosti priestoru V.

18.2.3. Tvrdenie. *Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sú navzájom rôzne vlastné hodnoty lineárneho operátora $\varphi\colon V \to V$. Potom k nim prislúchajúce vlastné vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ sú lineárne nezávislé.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ sú lineárne závislé. Potom existuje $j \leq k$ také, že vektor $\boldsymbol{v}_j$ je lineárnou kombináciou predchádzajúcich; zvoľme najmenšie také j. Keďže $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $j \geq 2$ a žiaden z vektorov $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{j-1}$ nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich, sú to lineárne nezávislé vektory. Pre nejaké skaláry $c_1, \dots, c_{j-1}$ platí $\boldsymbol{v}_j = c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1}$. Nakoľko $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$, aspoň jeden z týchto skalárov je $\neq 0$. Vektor $\lambda_j\boldsymbol{v}_j$ si vyjadríme dvoma spôsobmi:

$$\begin{aligned}
\lambda_j\boldsymbol{v}_j &= \varphi(\boldsymbol{v}_j) = c_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + c_{j-1}\varphi(\boldsymbol{v}_{j-1}) = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_{j-1}\lambda_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1},\\
\lambda_j\boldsymbol{v}_j &= \lambda_j(c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1}) = c_1\lambda_j\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\lambda_j\boldsymbol{v}_{j-1}.
\end{aligned}$$

V dôsledku toho

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_j)\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\boldsymbol{v}_{j-1} = \boldsymbol{0},$$

a keďže $\lambda_i \neq \lambda_j$ pre všetky $i \leq j-1$, aspoň jeden z koeficientov $c_i(\lambda_i - \lambda_j)$ je rôzny od nuly. To je však spor s nezávisloťou vektorov $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{j-1}$.

Práve dokázané tvrdenie spolu s vetou 18.2.2 majú za bezprostredný dôsledok prvú časť nasledujúceho tvrdenia.

18.2.4. Tvrdenie. *Nech φ je lineárny operátor na n-rozmernom vektorovom priestore V. Ak φ má n navzájom rôznych vlastných hodnôt $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, tak je φ je diagonalizovateľný v báze im prislúchajúcich vlastných vektorov. Navyše každý vlastný vektor $\boldsymbol{v}_i$ prislúchajúci k vlastnej hodnote λ_i je určený jednoznačne až na skalárny násobok.*

Dôkaz. Zostáva overiť záverečnú podmienku jednoznačnosti. Nech teda $j \leq n$ a $\boldsymbol{w}$ je tiež vlastný vektor prislúchajúci k vlastnej hodnote λ_j. Keďže $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ tvoria bázu V, $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^n c_i\boldsymbol{v}_i$ pre nejaké koeficienty $c_i \in K$. Dokážeme, že $\boldsymbol{w} = c_j\boldsymbol{v}_j$. V opačnom prípade by aj $\boldsymbol{w} - c_j\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ bol vlastným vektorom operátora φ prislúchajúcim k λ_j. Podľa predchádzajúceho tvrdenia sú vektory $\boldsymbol{w} - c_j\boldsymbol{v}_j$, a $\boldsymbol{v}_i$, $i \neq j$, lineárne nezávislé. To je však spor so skutočnosťou, že

$$\boldsymbol{w} - c_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{i \neq j} c_i\boldsymbol{v}_i$$

je lineárnou kombináciou ostatných vektorov.

18.3. Charakteristický polynóm

V tomto paragrafe si predvedieme, ako možno k danej štvorcovej matici $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ nájsť jej vlastné hodnoty a k nim prislúchajúce vlastné vektory. Reprezentácia lineárneho operátora na konečnorozmernom vektorovom priestore pomocou jeho matice v nejakej (dokonca ľubovoľnej) báze nám potom umožní vyriešiť analogickú úlohu aj preň.

Charakteristickým polynómom matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ nazývame polynóm

$$\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x) = \det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

v premennej x s koeficientmi z poľa K, t. j. $\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x) \in K[x]$. Charakteristický polynóm je zrejme polynóm stupňa n s koeficientom $(-1)^n$ pri najvyššej mocnine x^n. *Charakteristickou rovnicou* matice $\boldsymbol{A}$ nazývame rovnicu $\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x) = 0$, t. j.

$$\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}_n) = 0.$$

Niektorí autori definujú charakteristcký polynóm ako $\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$, čiže ako $(-1)^n$ krát „náš“ charakteristický polynóm – zrejme tento rozdiel je nepodstatný.

Význam práve definovaných pojmov je daný nasledujúcou vetou.

18.3.1. Veta. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$. Potom skalár $\lambda \in K$ je vlastnou hodotou matice $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, keď*

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n) = 0,$$

t. j. práve vtedy, keď λ vyhovuje charakteristickej rovnici matice $\boldsymbol{A}$.

Dôkaz. Skalár $\lambda \in K$ je vlastnou hodnotou matice $\boldsymbol{A}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ pre nejaký vektor $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in K^n$, čiže práve vtedy, keď homogénna sústava lineárnych rovníc $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má aspoň jedno *nenulové* riešenie $\boldsymbol{v} \in K^n$. To nastane práve vtedy, keď matica $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ je singulárna, t. j. $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$.

Zopakujme si ešte raz, čo sme sa naučili v tomto dôkaze a nie je zahrnuté v znení vety: vlastné vektory štvorcovej matice $\boldsymbol{A}$ prislúchajúce k jej vlastnej hodnote λ sú práve všetky nenulové riešenia homogénnej sústavy s maticou $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$; pritom práve singularita uvedenej matice zaručuje ich existenciu.

18.3.2. Veta. *Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Ak $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$, tak $\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}} = \operatorname{ch}_{\boldsymbol{B}}$; inými slovami, podobné matice majú rovnaký charakteristický polynóm.*

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú podobné a $\boldsymbol{P}$ je regulárna matica taká, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}$. Keďže aj $x\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}^{-1}\cdot x\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{P}$, s použitím rovností pre determinant súčinu matíc a determinant inverznej matice (vety 10.3.2 a 10.3.3) dostávame

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}_{\boldsymbol{B}}(x) &= \det(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{I}) = \det\bigl(\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\cdot x\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{P}\bigr)\\
&= \det\bigl(\boldsymbol{P}^{-1}\cdot(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{P}\bigr) = \det\boldsymbol{P}^{-1}\det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I})\det\boldsymbol{P}\\
&= \det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}) = \operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x).
\end{aligned}$$

To znamená, že i charakteristický polynóm je *invariantnom* podobnosti matíc. Táto jeho vlastnosť nám umožňuje korektne zadefinovať aj *charakteristický polynóm* $\operatorname{ch}_\varphi(x)$ *lineárnej transformácie* φ konečnorozmerného vektorového priestoru V ako charakteristický polynóm matice tejto transformácie vzhľadom na ľubovoľnú bázu priestoru V. Vlastné hodnoty takejto lineárnej transformácie sú potom totožné s vlastnými hodnotami jej matice.

Tvrdenie 18.2.1 teraz priamo vyplýva z vety 18.3.2. Keby sme boli schopní nahliadnuť, že koeficienty u mocnín x^0 resp. x^{n-1} v charakteristickom polynóme $\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x)$ matice $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ sú $\det\boldsymbol{A}$ resp. $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$, čiže

$$\operatorname{ch}_{\boldsymbol{A}}(x) = \det\boldsymbol{A} - \ldots + (-1)^{n-1}(a_{11} + \ldots + a_{nn})x^{n-1} + (-1)^n x^n$$

(čo nie je až také ťažké), mohli by sme okamžite dostať aj dôsledok 18.1.4 z práve dokázanej vety. Ani čitateľ, ktorý to nahliadnuť nedokáže, si však nemusí zúfať. Tieto výsledky nám totiž onedlho spadnú do lona samy, ako vedľajšie plody nášho štúdia.

18.4. Príklady

Pokúsme sa teraz na niekoľkých veľmi jednoduchých príkladoch (všetky sa týkajú matíc najnižšieho netriviálneho rozmeru 2×2) ilustrovať metódu výpočtu vlastných hodnôt λ matice $\boldsymbol{A}$ riešením jej charakteristickej rovnice $\mathrm{ch}_{\boldsymbol{A}}(x) = 0$ a následný výpočet vlastných vektorov riešením homogénnych sústav so singulárnymi maticami $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$. Zároveň sa pri tom zoznámime s rôznymi možnosťami, ktoré môžu nastať, a pripravíme si tak pôdu pre ďalšie úvahy.

18.4.1. Príklad. Súmernosť roviny podľa osi prechádzajúcej počiatkom a zvierajúcej s osou x uhol α je lineárny operátor $\boldsymbol{S}_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktorý má vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ maticu

$$\boldsymbol{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

(pozri príklad 6.4.4). Charakteristický polynóm

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{S}_\alpha - x\boldsymbol{I}_2) &= \begin{vmatrix} \cos 2\alpha - x & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = x^2 - 1 \end{aligned}$$

má dva korene $x_{1,2} = \pm 1$. K nim prislúchajúce vlastné vektory nájdeme riešením homogénnych sústav s maticami

$$\boldsymbol{S}_\alpha - \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha - 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\boldsymbol{S}_\alpha + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha + 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oba podpriestory riešení sú jednorozmerné, generované vektormi $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ resp. $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$. To znamená, že operátor operátor $\boldsymbol{S}_\alpha$ má vzhľadom na bázu tvorenú stĺpcami matice

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

diagonálnu maticu $\mathrm{diag}(1, -1)$. Ešte si všimnite, že $(\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ je smerový vektor našej osi súmernosti a $(-\sin\alpha, \cos\alpha)^T$ je smerový vektor kolmice na ňu v počiatku. Uvedomte si, že tento výsledok sa presne zhoduje s geometrickým názorom.

18.4.2. Príklad. Otočenie roviny okolo počiatku o uhol α je lineárny operátor $\boldsymbol{R}_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktorý má v kanonickej báze $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ maticu

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(pozri príklad 6.4.3). Charakteristický polynóm

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{R}_\alpha - x\boldsymbol{I}_2) &= \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 2x\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 \end{aligned}$$

má diskriminant $D = 4\cos^2\alpha - 4 = -4\sin^2\alpha$. Okrem triviálneho prípadu, keď $\sin\alpha = 0$, t.j. $\boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{I}_2$, ktorým sa ďalej nebudeme zaoberať, je $D < 0$, teda charakteristický polynóm nemá reálne korene. Preto tiež $\boldsymbol{R}_\alpha$ nemá reálne vlastné hodnoty a nie je podobná so žiadnou diagonálnou maticou nad $\mathbb{R}$.

Na druhej strane, keďže $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, na $\boldsymbol{R}_\alpha$ sa môžeme dívať ako na komplexnú maticu z $\mathbb{C}^{2\times 2}$; ako taká určuje vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ v $\mathbb{C}^2$ lineárny operátor $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. V poli $\mathbb{C}$ jej charakteristický polynóm už má dva korene $x_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha}$, ktorým zodpovedajúce vlastné vektory dostaneme riešením homogénnych sústav s maticami

$$\boldsymbol{R}_\alpha - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\boldsymbol{R}_\alpha - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oba podpriestory riešení sú jednorozmerné, generované vektormi $(1, -\mathrm{i})^T$ resp. $(1, \mathrm{i})^T$. To znamená, že operátor $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ daný predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}$ má vzhľadom na bázu tvorenú stĺpcami matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

diagonálnu maticu $\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$.

18.4.3. Príklad. Rovnoľahlosť v rovine so stredom v počiatku a koeficientom podobnosti $c \in \mathbb{R}$ je lineárny operátor $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktorý má v kanonickej báze $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ diagonálnu maticu $c\boldsymbol{I}_2$ (pozri príklad 6.4.5). Jej charakteristický polynóm

$$\det(c\boldsymbol{I}_2 - x\boldsymbol{I}_2) = (c - x)^2$$

má jeden dvojnásobný reálny koreň $x_{1,2} = c$. Podpriestor riešení homogénnej sústavy s maticou $c\boldsymbol{I}_2 - c\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0}_{2,2}$ je samozrejme celé $\mathbb{R}^2$. To znamená, že naša rovnoľahlosť má v *ľubovoľnej* báze priestoru $\mathbb{R}^2$ diagonálnu maticu $c\boldsymbol{I}_2$. Väčšinou, pokiaľ z nejakých dôvodov nedáme prednosť inej voľbe, si v takom prípade zvykneme vybrať kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}$.

18.4.4. Príklad. Skosenie roviny v smere osi x s parametrom $a \in \mathbb{R}$ je lineárny operátor $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s maticou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ (pozri príklad 6.4.6). Keďže pre $a = 0$ ide o identické zobrazenie, ktoré má v ľubovoľnej báze maticu $\boldsymbol{I}_2$ (čo je špeciálny prípad predošlého príkladu), budeme ďalej predpokladať, že $a \neq 0$. Charakteristický polynóm

$$\begin{vmatrix} 1 - x & 0 \\ a & 1 - x \end{vmatrix} = (1 - x)^2$$

má jeden dvojnásobný reálny koreň $x_{1,2} = 1$. K nemu prislúchajúce vlastné vektory nájdeme riešením homogénnej sústavy s maticou

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podpriestor riešení je jednorozmerný, generovaný vektorom $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$, preto skosenie v smere osi x s nenulovým parametrom nie je diagonalizovateľný lineárny operátor.

18.4.5. Príklad. Hyperbpolická rotácia Minkowského „časopriamky" $\mathbb{R}^{(1,1)}$ o hyperbolický uhol $\theta \in \mathbb{R}$ je lineárny operátor $\boldsymbol{Rh}_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ktorý má v kanonickej báze $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1)$ maticu

$$\boldsymbol{Rh}_\theta = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

(pozri paragraf 16.7). Charakteristický polynóm

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{Rh}_\theta - x\boldsymbol{I}_2) &= \begin{vmatrix} \cosh\theta - x & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta - x \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 2x\cosh\theta + \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = x^2 - 2x\cosh\theta + 1 \end{aligned}$$

má diskriminant $D = 4\cosh^2\theta - 4 = 4\sinh^2\theta \geq 0$ a dva reálne korene

$$x_{1,2} = \cosh\theta \pm \sinh\theta = \mathrm{e}^{\pm\theta}.$$

Pre $\theta = 0$ je $\boldsymbol{Rh}_\theta = \boldsymbol{I}_2$, takže ide o algebraicky i geometricky dvojnásobné vlastné číslo $\mathrm{e}^0 = 1$. Pre $\theta \neq 0$ dostávame dve jednoduché vlastné čísla. Príslušné vlastné vektory nájdeme riešením homogénnych sústav s maticami

$$\boldsymbol{Rh}_\theta - \mathrm{e}^\theta\,\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} \cosh\theta - \mathrm{e}^\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta - \mathrm{e}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sinh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & -\sinh\theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resp.

$$\boldsymbol{Rh}_\theta - \mathrm{e}^{-\theta}\,\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} \cosh\theta - \mathrm{e}^{-\theta} & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta - \mathrm{e}^{-\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \sinh\theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oba podpriestory riešení sú jednorozmerné, generované vlastnými vektormi $(1,1)^T$, resp. $(1,-1)^T$. Všimnite si, že ide o svetelné vektory. V nimi tvorenej báze, danej stĺpcami matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

má hyperbolická rotácia $\boldsymbol{Rh}_\theta$ diagonálnu maticu $\operatorname{diag}(\mathrm{e}^\theta, \mathrm{e}^{-\theta})$.

18.5. Lineárne operátory na nekonečnorozmerných priestoroch

V tomto paragrafe (ako napokon ani v celom kurze) nie je našim cieľom systematické štúdium lineárnych operátorov na nekonečnorozmerných priestoroch. Obmedzíme sa len na dva poučné príklady, na ktorých sa výrazne prejavia rozdiely medzi konečno- a nekonečnorozmerným prípadom.

18.5.1. Príklad. Symbolom $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ sa zvykne označovať množina všetkých funkcií $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré majú na celom $\mathbb{R}$ spojité derivácie všetkých rádov. Zrejme $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ je lineárny podpriestor reálneho vektorového priestoru $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ všetkých spojitých funkcií $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operáciami definovanými po zložkách (pozri príklady 4.1.3 a 6.1.8). Potom pre každú funkciu $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ aj jej derivácia $D(f) = f'$ patrí do $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, teda $D\colon \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ je lineárny operátor. Podmienka $D(f) = \lambda f$ pre jeho vlastnú hodnotu a príslušnú vlastnú funkciu nie je nič iného než diferenciálna rovnica

$$f'(x) = \lambda f(x),$$

ktorá má pre každé λ riešenie

$$f(x) = f(0)\,\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

To však v reči tejto kapitoly znamená, že *každé* reálne číslo λ je vlastnou hodnotou operátora D a prislúcha mu jednorozmerný vlastný podpriestor generovaný funkciou $\mathrm{e}^{\lambda x}$.

18.5.2. Príklad. Určitý integrál chápaný ako funkcia hornej medze, ktorý spojitej funkcii $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ priradí predpisom $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ jej primitívnu funkciu $I(f) = F$, definuje lineárny operátor $I\colon \mathcal{C}\langle a,b\rangle \to \mathcal{C}\langle a,b\rangle$ na vektorovom priestore $\mathcal{C}\langle a,b\rangle$ všetkých spojitých reálnych funkcií na intervale $\langle a,b\rangle$ (pozri príklad 6.1.9). Podmienka $I(f) = \lambda f$ pre jeho vlastnú hodnotu a príslušnú vlastnú funkciu má tvar integrálnej rovnice

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x).$$

Ak $\lambda = 0$, tak derivovaním oboch strán podľa x zistíme, že jediná spojitá funkcia f, ktorá ju spĺňa, je identicky rovná nule. Teda 0 nie je vlastné číslo operátora I.

Nech teda $\lambda \neq 0$. Keďže funkcia na pravej strane je diferencovateľná, musí byť diferencovateľná aj f, a po derivovaní oboch strán podľa x dostávame diferenciálnu rovnicu $f(x) = \lambda f'(x)$, čiže

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x),$$

ktorá, podobne ako v predchádzajúcom príklade, má riešenie

$$f(x) = f(a)\,\mathrm{e}^{\frac{x-a}{\lambda}}.$$

Dosadením $x = a$ do do pôvodného vzťahu dostávame

$$\lambda f(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

teda $f(a) = 0$, čo má opäť za následok $f(x) = 0$ pre každé x. Teda ani žiadne reálne $\lambda \neq 0$ nie je vlastným číslom operátora I.

Poučení príkladom 18.4.2 by sme sa mohli pokúšať nájsť nejaké komplexné vlastné čísla operátora I. Ale už zbežný pohľad na práve vykonané úvahy nám ukáže, že reálnosť skalára λ v nich nehrala podstatnú úlohu. Teda z rovnakých dôvodov I nemá ani komplexné vlastné čísla.

Na druhej strane, lineárny operátor $I_a : \mathcal{C}\langle a, b\rangle \to \mathcal{C}\langle a, b\rangle$ daný predpisom

$$I_a(f)(x) = f(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

pre $f \in \mathcal{C}\langle a, b\rangle$, $x \in \langle a, b\rangle$ má jediné vlastné číslo $\lambda = 1$. Všetky riešenia príslušnej integrálnej rovnice $I_a(f) = f$ majú tvar

$$f(x) = f(a)\,\mathrm{e}^{x-a}\,.$$

To znamená, že tvoria jednorozmerný vlastný podpriestor generovaný vlastnou funkciou e^{x-a}. Presvedčte sa o tom.