7. HODNOSŤ MATICE, INVERZNÉ MATICE A ZMENA BÁZY

V tejto kapitole zavedieme pojem *inverznej matice* k danej štvorcovej matici a dáme ho do súvisu s pojmom inverzného lineárneho zobrazenia. Ďalej sa naučíme počítať inverzné matice a matice prechodu z jednej súradnej bázy do druhej. Nakoniec preskúmame vplyv zmeny bázy na maticu lineárneho zobrazenia. Začneme však s pojmom *hodnosti matice*, ktorý nám umožní rozhodnúť o existencii inverznej matice a – ako uvidíme neskôr – bude nám ešte veľakrát užitočný.

V celej kapitole K označuje pevné pole, m, n, p sú kladné celé čísla.

7.1. Hodnosť matice

V tomto paragrafe je potrebné rozlišovať medzi vektorovými priestormi riadkových resp. stĺpcových vektorov. Nebudeme teda používať nešpecifikované označenie K^n, ale priestor riadkových vektorov budeme značiť $K^{1\times n}$ a priestor stĺpcových vektorov $K^{n\times 1}$.

Pripomeňme, že $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A}) \in K^{1\times n}$ označuje i-tý riadok a $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) \in K^{m\times 1}$ zase j-tý stĺpec matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Túto maticu teda môžeme zapísať v blokových tvaroch

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}) \\ \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{A}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A}) \end{pmatrix} = (\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})).$$

Riadkovou hodnosťou $h_r(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ nazývame dimenziu lineárneho podpriestoru vektorového priestoru $K^{1\times n}$ generovaného riadkami matice $\boldsymbol{A}$. Podobne, *stĺpcovou hodnosťou* $h_s(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ nazývame dimenziu lineárneho podpriestoru vektorového priestoru $K^{m\times 1}$ generovaného stĺpcami matice $\boldsymbol{A}$. Teda

$$\begin{aligned} h_r(\boldsymbol{A}) &= \dim[\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A})], \\ h_s(\boldsymbol{A}) &= \dim[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})] \end{aligned}$$

Označme $\varphi\colon K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ lineárne zobrazenie dané predpisom $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ pre $\boldsymbol{x} \in K^{n\times 1}$. Pripomeňme, že hodnosťou lineárneho zobrazenia φ nazývame dimenziu jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi$. V našom prípade zrejme platí $h(\varphi) = h_s(\boldsymbol{A})$, keďže lineárny podpriestor $\operatorname{Im}\varphi \subseteq K^{m\times 1}$ je generovaný stĺpcami matice $\boldsymbol{A}$.

7.1.1. Lema. *Nech* $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$.

(a) *Nech matica* $\boldsymbol{B}$ *vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ERO. Potom* $[\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{B}), \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{B}), \dots, \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{B})]$.

(b) *Nech matica* $\boldsymbol{C}$ *vznikne z matice* $\boldsymbol{A}$ *vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ESO. Potom* $[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{C}), \boldsymbol{s}_2(\boldsymbol{C}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{C})]$.

Dôkaz. Zrejme pre ľubovoľné vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ v každom vektorovom priestore V a ľubovoľný skalár $c \in K$ platí:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_k] &= [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{u}_k], \\ [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{u}_k] &= [\boldsymbol{u}_1, \dots, c\boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{u}_k] \qquad (\text{ak } c \neq 0), \\ [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, \boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_k] &= [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_i, \dots, c\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_j, \dots, \boldsymbol{u}_k]. \end{aligned}$$

7.1.2. Tvrdenie. *Pre každú maticu* $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ *platí* $h_r(\boldsymbol{A}) = h_s(\boldsymbol{A})$.

Dôkaz. Upravme $\boldsymbol{A}$ pomocou ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ a označme k počet nenulových riadkov v matici $\boldsymbol{B}$. Podľa práve dokázanej lemy platí $[\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{B}), \dots, \boldsymbol{r}_m(\boldsymbol{B})]$. Preto tiež $h_r(\boldsymbol{A}) = h_r(\boldsymbol{B})$. Keďže nenulové riadky matice $\boldsymbol{B}$ sú zrejme lineárne nezávislé (rozmyslite si prečo), $h_r(\boldsymbol{B}) = k$, čo je vlastne počet stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$, v ktorých sa nachádza vedúci prvok nejakého jej riadku. Označme $1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n$ indexy týchto stĺpcov. Podľa tvrdenia 4.5.3 vektory $\boldsymbol{s}_{j_1}(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_{j_k}(\boldsymbol{A})$ sú lineárne nezávislé a platí $[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})] = [\boldsymbol{s}_{j_1}(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_{j_k}(\boldsymbol{A})]$. Preto tiež $h_s(\boldsymbol{A}) = k = h_r(\boldsymbol{A})$.

Keďže riadková a stĺpcová hodnosť ľubovoľnej matice $\boldsymbol{A}$ splývajú, túto ich spoločnú hodnotu budeme odteraz značiť jednoducho $h(\boldsymbol{A})$ a nazývať *hodnosťou matice* $\boldsymbol{A}$. Zrejme pre $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ je $h(\boldsymbol{A}) \le \min(m, n)$.

Práve vykonané úvahy majú dva bezprostredné dôsledky.

7.1.3. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$. *Potom* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T)$.

7.1.4. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \in K^{m\times 1}$ *sú ľubovoľné vektory a* $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ *je matica taká, že* $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{u}_j$ pre $1 \le j \le n$. *Potom*

(a) $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ *sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď* $h(\boldsymbol{A}) = n$;

(b) $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n] = K^{m\times 1}$ *práve vtedy, keď* $h(\boldsymbol{A}) = m$.

Všimnite si, že prípad (a) môže nastať iba vtedy, keď $n \le m$; naopak, (b) môže nastať jedine za predpokladu $m \le n$.

Sami si sformulujte a premyslite analogické tvrdenia pre riadkové vektory.

Ešte si dokážeme jeden odhad hodnosti súčinu matíc pomocou hodností jednotlivých činiteľov.

7.1.5. Tvrdenie. *Nech* $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times p}$. *Potom*

$$h(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \le \min\big(h(\boldsymbol{A}), h(\boldsymbol{B})\big).$$

Dôkaz. Označme $\varphi\colon K^n \to K^m$, $\psi\colon K^p \to K^n$ lineárne zobrazenia dané predpismi $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ pre $\boldsymbol{x} \in K^n$ resp. $\psi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{y}$ pre $\boldsymbol{y} \in K^p$. Zrejme $\operatorname{Im}(\varphi\circ\psi) \subseteq \operatorname{Im}\varphi$, preto

$$h(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = h(\varphi\circ\psi) \le h(\varphi) = h(\boldsymbol{A}).$$

S využitím toho druhý potrebný odhad už dostaneme priamym výpočtom

$$h(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = h\big((\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T\big) = h\big(\boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T\big) \le h\big(\boldsymbol{B}^T\big) = h(\boldsymbol{B}).$$

7.2. Inverzné matice a inverzné lineárne zobrazenia

Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, t. j. $\boldsymbol{A}$ je *štvorcová* matica typu $n \times n$. *Inverznou maticou* k matici $\boldsymbol{A}$ rozumieme maticu $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ takú, že

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}.$$

Zrejme k danej štvorcovej matici $\boldsymbol{A}$ existuje najviac jedna inverzná matica (rozmyslite si prečo). Túto jednoznačne určenú maticu (ak existuje) budeme značiť $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Nasledujúca veta je bezprostredným dôsledkom súvisu medzi lineárnymi zobrazeniami a ich maticami.

7.2.1. Veta. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\dim U = \dim V = n$. Nech ďalej $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú nejaké bázy v U, resp. vo V a $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je matica lineárneho zobrazenia $\varphi\colon V \to U$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$. Potom k matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ práve vtedy, keď k zobrazeniu φ existuje inverzné zobrazenie φ^{-1}. V tom prípade $\boldsymbol{A}^{-1}$ je maticou lineárneho zobrazenia $\varphi^{-1}\colon U \to V$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, t. j.*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \big((\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\big)^{-1} = \big(\varphi^{-1}\big)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Hovoríme, že štvorcová matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je *regulárna*, ak k nej existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$; v opačnom prípade hovoríme, že $\boldsymbol{A}$ je *singulárna*.

7.2.2. Veta. *Matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ je regulárna práve vtedy, keď $h(\boldsymbol{A}) = n$.*

Dôkaz. Označme $\varphi\colon K^n \to K^n$ lineárnu transformáciu danú predpisom $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ pre $\boldsymbol{x} \in K^n$. K matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$ práve vtedy, keď k zobrazeniu φ existuje inverzné zobrazenie φ^{-1}, t. j. práve vtedy, keď φ je bijekcia. Podľa dôsledku 6.2.4 to nastane práve vtedy, keď φ je surjekcia, čiže $\operatorname{Im}\varphi = K^n$, čo je ekvivalentné s rovnosťou $\dim \operatorname{Im}\varphi = n$. Na dokončenie dôkazu si stačí spomenúť, že $h(\boldsymbol{A}) = h(\varphi) = \dim \operatorname{Im}\varphi$.

Z praktických dôvodov bude užitočné si uvedomiť, že na to, aby sme sa presvedčili, že matica $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ je inverzná k matici $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, stačí overiť len jednu (a to hocktorú) z rovností $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.

7.2.3. Tvrdenie. *Pre ľubovoľné $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$.*

Dôkaz. Označme $\varphi, \psi\colon K^n \to K^n$ lineárne transformácie dané pre $\boldsymbol{x} \in K^n$ predpismi $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$, resp. $\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}$. Nech $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$. To nastane práve vtedy, keď $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{K^n}$. Z toho vyplýva, že φ je surjekcia a ψ je injekcia (pozri paragraf 0.3). Keďže φ, ψ sú lineárne transformácie konečnorozmerného vektorového priestoru, podľa dôsledku 6.2.4. to znamená, že φ aj ψ sú bijekcie, teda lineárne izomorfizmy, a $\psi = \varphi^{-1}$. Potom však $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, preto tiež $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$. Obrátená implikácia vyplýva zo symetrie tvrdenia.

S využitím posledného tvrdenia si ako cvičenie overte nasledujúce vzorce, z ktorých už vyplýva zvyšok tvrdenia.

7.2.4. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ sú regulárne matice. Potom aj matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A}^T$ sú regulárne a platí:*

$$\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^{-1} = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}, \qquad \big(\boldsymbol{A}^T\big)^{-1} = \big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^T.$$

7.3. Realizácia ERO a ESO pomocou násobenia matíc

Prakticky všetky úlohy lineárnej algebry, s ktorými sme sa doteraz stretli, sme riešili tak, že sme danú situáciu reprezentovali nejakou vhodnou maticou, tú sme ďalej pomocou ERO upravili na redukovaný stupňovitý tvar a tento výsledný tvar sme potom interpretovali v závislosti na charaktere pôvodnej úlohy. Prezraďme už vopred, že zatiaľ sme všetky úlohy, ktoré sa riešia úpravou matíc pomocou ERO prípadne ESO, zďaleka nevyčerpali. Naopak, táto metóda nás bude v lineárnej algebre neustále sprevádzať.

Skôr než pristúpime k ďalšiemu využitiu tejto metódy, tentoraz pri výpočte inverznej matice, však bude potrebné si uvedomiť, že ERO aj ESO možno realizovať pomocou násobenia matíc.

7.3.1. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$.*

(a) *Nech $\boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ERO. Označme $\boldsymbol{E}$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{I}_m$ vykonaním tej istej ERO. Potom $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}$.*

(b) *Nech $\boldsymbol{C} \in K^{m\times n}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ vykonaním jednej (inak ľubovoľnej) ESO. Označme $\boldsymbol{F}$ maticu, ktorá vznikne z matice $\boldsymbol{I}_n$ vykonaním tej istej ESO. Potom $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}$.*

Dôkaz. Možno overiť priamym výpočtom pre každý jednotlivý druh ERO resp. ESO. Ako cvičenie si to skúste napr. pre maticu $\boldsymbol{A}$ typu 3×2, resp. 3×3.

Štvorcové matice $\boldsymbol{E} \in K^{n\times n}$, ktoré vzniknú z jednotkovej matice $\boldsymbol{I}_n$ vykonaním jedinej ERO alebo ESO, nazývame *elementárne matice*. Posledná veta teda hovorí, že ľubovoľnú ERO (ESO) na matici $\boldsymbol{A}$ možno realizovať vynásobením matice $\boldsymbol{A}$ vhodnou elementárnou maticou $\boldsymbol{E}$ zľava (sprava).

7.4. Výpočet inverznej matice

Návod na výpočet inverznej matice k danej štvorcovej matici $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ si možno najľahšie zapamätať v tvare nasledujúcej schémy:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\boldsymbol{I}_n \mid \boldsymbol{A}^{-1}).$$

Tento postup má navyše tú výhodu, že sa nemusíme vopred starať, či inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$ existuje alebo nie. Ak $\boldsymbol{A}^{-1}$ existuje, tak ju nakoniec vypočítame, ak neexistuje, tak to odhalíme počas nášho výpočtu a ďalej v ňom nebudeme pokračovať. Celý postup si teraz vysvetlíme trochu podrobnejšie.

Bloková matica $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}_n)$ vznikne tak, že matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{I}_n$ jednoducho napíšeme vedľa seba. Túto maticu teraz budeme upravovať pomocou ERO tak, aby sme v ľavej časti z matice $\boldsymbol{A}$ dostali jednotkovú maticu $\boldsymbol{I}_n$. Akonáhle sa nám to podarí, matica v pravej časti výslednej blokovej matice je už hľadaná matica $\boldsymbol{A}^{-1}$. Ak sa nám to nepodarí, t. j. matica $\boldsymbol{A}$ nie je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou (čo nastane práve vtedy, keď $h(\boldsymbol{A}) < n$, a spoznáme to podľa toho, že sa nám v ľavej časti objaví nejaký nulový riadok), tak inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$ neexistuje.

Korektnosť uvedeného postupu vyplýva z nasledujúceho očividného tvrdenia a skutočnosti, že ERO možno reprezentovať násobením elementárnymi maticami zľava. Taktiež tu hrá úlohu fakt, že pre $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$ platí $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$ práve vtedy, keď $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$, uvedený v tvrdení 7.2.3.

7.4.1. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ a $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_k \in K^{n\times n}$ sú elementárne matice také, že $\boldsymbol{E}_k \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$. Potom $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}_k \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$.*

Poznamenajme, že k rovnakému cieľu vedie tiež postup reprezentovaný schémou:

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{I}_n}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\boldsymbol{A}^{-1}}\right).$$

Rozmyslite si prečo a sformulujte príslušné tvrdenie.

Z práve vykonaných úvah vyplývajú nasledujúce tri dôsledky. Posledný z nich je čiastočným obrátením odhadu hodnosti súčinu matíc za predpokladu regularity aspoň jedného z činiteľov.

7.4.2. Tvrdenie. *Matica $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$je regulárna práve vtedy, keď ju možno rozložiť na súčin $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{E}_k$ konečného počtu elementárnych matíc $\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_k \in K^{n\times n}$.*

7.4.3. Tvrdenie. *Pre ľubovoľné $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ platí:*
(a) $\boldsymbol{A}$ je riadkovo ekvivalentná s $\boldsymbol{B}$ práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\boldsymbol{P} \in K^{m\times m}$ taká, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{B}$;
(b) $\boldsymbol{A}$ je stĺpcovo ekvivalentná s $\boldsymbol{B}$ práve vtedy, keď existuje regulárna matica $\boldsymbol{Q} \in K^{n\times n}$ taká, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Q}$.

7.4.4. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{P} \in K^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q} \in K^{n\times n}$, pričom $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ sú regulárne matice. Potom*

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}) = h(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}).$$

Trochu všeobecnejšie možno uvedené úvahy použiť na násobenie ľubovoľnej matice vhodného rozmeru maticou $\boldsymbol{A}^{-1}$ (ak existuje) zľava resp. sprava. Tieto operácie možno uskutočniť pre regulárnu $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ a ľubovoľné $\boldsymbol{B} \in K^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in K^{m\times n}$ podľa nasledujúcich schém:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\boldsymbol{I}_n \mid \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}),$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{C}}\right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\frac{\boldsymbol{I}_n}{\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}}\right).$$

Ešte si všimnime, že v špeciálnom prípade sme niečo podobné vlastne robili už dávno, pri riešení sústav lineárnych rovní úpravou na redukovaný stupňovitý tvar pomocou ERO. Aj tento postup totiž možno vyjadriť pomocou schémy

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{c}),$$

ktorá má pre regulárnu $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ tvar

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\boldsymbol{I}_n \mid \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}).$$

Ako vedľajší produkt našich úvah tak dostávame nasledujúci výsledok o riešení sústav n lineárnych rovníc o n neznámych.

7.4.5. Veta. *Nech $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $\boldsymbol{b} \in K^n$. Ak $\boldsymbol{A}$ je regulárna, tak sústava $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má jediné riešenie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$.*

7.5. Matica prechodu

Nech V je vektorový priestor nad poľom K a $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ sú jeho dve bázy. *Maticou prechodu* z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame maticu identického zobrazenia $\mathrm{id}_V : V \to V$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$, ktorú značíme $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$. Teda

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Podľa definície matice lineárneho zobrazenia vzhľadom na dané bázy (pozri paragraf 6.4), stĺpce matice prechodu $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ sú tvorené súradnicami vektorov bázy $\boldsymbol{\beta}$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$, t. j. $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}}$ pre $1 \le j \le n$. Teda

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \big((\boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, (\boldsymbol{v}_2)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\big),$$

a podľa vety 6.4.1 je táto matica jednoznačne určená podmienkou transformácie súradníc

$$(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in V$.

Ak do zrejmej rovnosti $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ (pozri paragraf 5.3) budeme za $\boldsymbol{x}$ postupne dosadzovať vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ bázy $\boldsymbol{\beta}$, s využitím vzťahu pre stĺpce súčinu matíc z paragrafu 2.3 dostaneme

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$$

pre každé $1 \le j \le n$. Tým sme dostali ďalší dôležitý vzťah, ktorý jednoznačne charakterizuje maticu prechodu $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$:

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}.$$

(Podotýkame, že súčin $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ treba chápať v zmysle paragrafu 2.3.)

Zhrnutím vykonaných úvah dostávame tri ekvivalentné charakterizácie matice prechodu.

7.5.1. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú bázy n-rozmerného vektorového priestoru V nad poľom K. Potom pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
(i) $\boldsymbol{P} = (\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, t. j. $\boldsymbol{P}$ je matica prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$;
(ii) $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ pre každé $\boldsymbol{x} \in V$;
(iii) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\beta}$.

Z definície matice prechodu a vety 6.4.2 okamžite vyplývajú nasledujúce rovnosti.

7.5.2. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ sú bázy konečnorozmerného vektorového priestoru V nad poľom K. Potom*

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{I}_n, \qquad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}^{-1}, \qquad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}},$$

Z druhej z uvedených podmienok vidno, že matica prechodu $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je vždy *regulárna.* Taktiež naopak, každá regulárna matica $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ je maticou prechodu medzi vhodnou dvojicou báz.

7.5.3. Tvrdenie. *Nech V je n-rozmerný vektorový priestor nad K a $\boldsymbol{P} \in K^{n\times n}$ je ľubovoľná regulárna matica. Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ je nejaká báza vo V. Položme $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_j$ pre $1 \le j \le n$, a ďalej*

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P}^{-1}.$$

Potom $\boldsymbol{P}$ je maticou prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$ a taktiež z bázy $\boldsymbol{\alpha}$ do bázy $\boldsymbol{\gamma}$, t. j.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}}.$$

Špeciálne, $\boldsymbol{P}$ je maticou prechodu z bázy $(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{P}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{P}))$ do bázy $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ v K^n a taktiež z bázy $\boldsymbol{\varepsilon}$ do bázy $(\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{P}^{-1}), \ldots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{P}^{-1}))$.

V prípade, keď $V = K^n$ je priestor stĺpcových vektorov, možno každú jeho bázu $\boldsymbol{\alpha}$ stotožniť s príslušnou regulárnou maticou, ktorej stĺpcami sú vektory danej bázy. Pri takomto stotožnení je návod na výpočet matice prechodu obsiahnutý v nasledujúcom tvrdení.

7.5.4. Tvrdenie. *Nech $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ sú dve bázy stĺpcového vektorového priestoru K^n. Potom $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}$.*

Dôkaz. Z podmienky $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$ okamžite vyplýva požadovaná rovnosť.

To nám dáva návod na výpočet matice prechodu pre bázy $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ vektorového priestoru K^n podľa už známej schémy

$$(\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\boldsymbol{I}_n \mid \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}) = (\boldsymbol{\varepsilon} \mid \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta}).$$

7.6. Matice lineárneho zobrazenia vzhľadom na rôzne bázy

V tomto článku sa budeme zaoberať vplyvom zmeny báz na maticu lineárneho zobrazenia, presnejšie, vzťahom medzi maticami daného lineárneho zobrazenia vzhľadom na rôzne dvojice báz.

7.6.1. Veta. *Nech V_1, V_2 sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K, $\varphi\colon V_1 \to V_2$ je lineárne zobrazenie, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_1$ sú dve bázy priestoru V_1 a $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2$ sú dve bázy priestoru V_2. Potom*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}.$$

Dôkaz. Označme $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1}$, $\boldsymbol{B} = (\varphi)_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1}$ matice lineárneho zobrazenia φ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, resp. bázy $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$. Pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in V_1$ platí:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_1} &= (\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_2} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot (\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}_2}\\ &= \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}_1} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}_1}.\end{aligned}$$

Na základe vety 6.4.1 z toho okamžite vyplýva dokazovaná rovnosť

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}.$$

Poslednú transformačnú formulku si možno najľahšie zapamätať pomocou nasledujúceho diagramu:

$$\begin{tikzcd}
(V_1, \boldsymbol{\alpha}_1) \arrow[r, "\boldsymbol{A}"] & (V_2, \boldsymbol{\alpha}_2) \arrow[d, "\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2}"] \\
(V_1, \boldsymbol{\beta}_1) \arrow[u, "\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1}"] \arrow[r, "\boldsymbol{B}"'] & (V_2, \boldsymbol{\beta}_2)
\end{tikzcd}$$

Nezabudnite, že zobrazenia skladáme „v obrátenom poradí“, a tomu musí zodpovedať aj „obrátené poradie“ násobenia matíc!

7.6.2. Príklad. Nech $\varphi\colon K^n \to K^m$ je lineárne zobrazenie a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú nejaké bázy priestorov K^m resp. K^n. Označme $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{M} = (\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ matice zobrazenia φ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ resp. vzhľadom na kanonické bázy $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$. Podľa poslednej vety platí:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)},\boldsymbol{\beta}},\\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}.\end{aligned}$$

Ak stotožníme každú bázu s regulárnou maticou, ktorej stĺpce sú vektory tejto bázy, tak uvedené rovnosti nadobudnú tvar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{I}_m \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\beta},\\ \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{I}_m^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1} \cdot \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1},\end{aligned}$$

umožňujúci priamy výpočet jednej z matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{M}$ na základe znalosti báz $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ a druhej z nich.

Položme si teraz obrátenú otázku. Za akých podmienok sú matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ maticami toho istého lineárneho zobrazenia $\varphi\colon V \to U$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) dvojice báz konečnorozmerných vektorových priestorov U, V? Odpoveď na ňu dáva nasledujúca veta.

7.6.3. Veta. *Nech U je m-rozmerný a V je n-rozmerný vektorový priestor nad poľom K. Potom pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

(i) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sú maticami toho istého lineárneho zobrazenia $\varphi\colon V \to U$ vzhľadom na nejaké dve (možno no nie nutne rôzne) dvojice báz priestorov U, V;
(ii) existujú regulárne matice $\boldsymbol{P} \in K^{m\times m}$, $\boldsymbol{Q} \in K^{n\times n}$ také, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}$;
(iii) $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Dôkaz. Ekvivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) je priamym dôsledkom vety 7.6.1 a tvrdenia 7.5.3. Implikácia (ii) $\Rightarrow$ (iii) vyplýva z tvrdenia 7.4.4.

Zostáva dokázať (iii) $\Rightarrow$ (ii). Označme $h = h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$. Pomocou ERO upravíme $\boldsymbol{A}$ aj $\boldsymbol{B}$ na redukovaný trojuholníkový tvar $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{A}$, resp. $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ sú regulárne matice. Zrejme $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$ majú rovnaký počet nenulových riadkov rovný h. $\boldsymbol{A}'$ aj $\boldsymbol{B}'$ možno ďalej pomocou ESO upraviť na blokový tvar

$$\boldsymbol{A}'' = \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_h & \boldsymbol{0}_{h,n-h} \\ \boldsymbol{0}_{m-h,h} & \boldsymbol{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{B}'',$$

kde $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ sú regulárne matice. Stačí pomocou vedúcich prvkov jednotlivých riadkov vynulovať prípadné ďalšie nenulové prvky týchto riadkov a, ak treba, vymeniť poradie niektorých stĺpcov. Potom $\boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{Q}_2$, teda $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdot \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{Q}_2^{-1}$ a matice $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2^{-1} \cdot \boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \cdot \boldsymbol{Q}_2^{-1}$ sú zrejme regulárne.

Na základe dôkazu tejto vety okamžite dostávame záverečný výsledok.

7.6.4. Veta. *Pre každé lineárne zobrazenie $\varphi \colon V \to U$ medzi konečnorozmernými vektorovými priestormi nad poľom K možno zvoliť bázu $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V a bázu $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru U tak, že φ má vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ maticu v blokovom tvare*

$$(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_h & \boldsymbol{0}_{h,n-h} \\ \boldsymbol{0}_{m-h,h} & \boldsymbol{0}_{m-h,n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.

Skúste si túto vetu dokázať priamo a bližšie špecifikovať bázy $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\alpha}$. (*Návod*: Spomeňte si na dôkaz vety 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu.)