6. LINEÁRNE ZOBRAZENIA

Až doteraz sme sa pri štúdiu lineárnej algebry sústredili zakaždým na štruktúru jedného, izolovaného vektorového priestoru. Zatiaľ sme si nevybudovali pojmy, ktoré by nám umožnili štúdium vzťahov medzi viacerými vektorovými priestormi. V tejto kapitole hodláme zaplniť túto medzeru. Zavedieme a bližšie preskúmame pojem *lineárneho zobrazenia*, ktorý nám umožní porovnávať štruktúry rôznych vektorových priestorov nad tým istým pevne zvoleným poľom. Voľne povedané, pôjde o zobrazenia medzi vektorovými priestormi, ktoré zachovávajú ich lineárnu štruktúru.

6.1. Lineárne zobrazenia

Nech U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom K. Hovoríme, že $\varphi\colon V \to U$ je *lineárne zobrazenie*, ak φ zachováva operácie vektorového súčtu a skalárneho násobku, t. j. ak pre ľubovoľné $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $c \in K$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{y}),$$
$$\varphi(c\boldsymbol{x}) = c\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Ako cvičenie si dokážte, že lineárne zobrazenia zachovávajú nulu a opačné vektory, t. j. pre lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ a $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad \varphi(-\boldsymbol{x}) = -\varphi(\boldsymbol{x}).$$

Zrejme pre každý vektorový priestor V identita $\mathrm{id}_V : V \to V$ je lineárne zobrazenie. Taktiež pre ľubovoľné vektorové priestory U, V nad poľom K zobrazenie $\boldsymbol{0}\colon V \to U$, ktoré každému vektoru $\boldsymbol{x} \in V$ priradí nulový vektor $\boldsymbol{0} \in U$, je lineárne. Komutatívnosť operácie súčinu v poli a jeho distributívnosť vzhľadom na sčítanie znamená, že pre ľubovoľný pevný skalár $a \in K$ je priradením $x \mapsto ax$ definované lineárne zobrazenie $K \to K$. Čoskoro sa zoznámime aj s menej triviálnymi príkladmi lineárnych zobrazení.

No zatiaľ si ešte všimnime jednu odlišnosť v použití názvu „lineárne zobrazenie“ v lineárnej algebre oproti matematickej analýze, kde sa pod lineárnou funkciou $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozumie ľubovoľná funkcia tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Ľahko sa možno presvedčiť, že takéto $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineárne zobrazenie v zmysle našej definície práve vtedy, keď $b = 0$. Neskôr zavedieme širšiu triedu zobrazení medzi vektorovými priestormi, ktorá zahŕňa aj takéto „v zmysle matematickej analýzy lineárne“ zobrazenia.

Lineárne zobrazenia možno charakterizovať ako zobrazenia medzi vektorovými priestormi (nad tým istým poľom), ktoré zachovávajú lineárne kombinácie. Jednoduchý dôkaz tohto pozorovania prenechávame čitateľovi. (*Návod*: Pozrite sa na dôkaz tvrdenia 4.1.2.)

6.1.1. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\varphi\colon V \to U$ je ľubovoľné zobrazenie. Nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*
- *(i) φ je lineárne zobrazenie;*
- *(ii) pre všetky $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $a, b \in K$ platí $\varphi(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\varphi(\boldsymbol{y})$;*
- *(iii) pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a všetky $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in V$, $c_1, \dots, c_n \in K$ platí $\varphi(c_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{x}_n) = c_1\varphi(\boldsymbol{x}_1) + \ldots + c_n\varphi(\boldsymbol{x}_n)$.*

Nasledujúce dve tvrdenia zachytávajú významné vlastnosti lineárnych zobrazení: kompozícia lineárnych zobrazení je opäť lineárne zobrazenie a obrazy i vzory lineárnych podpriestorov v lineárnych zobrazeniach sú tiež lineárnymi podpriestormi.

6.1.2. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K a $\psi\colon W \to V$, $\varphi\colon V \to U$ sú lineárne zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $\varphi \circ \psi\colon W \to U$ je lineárne zobrazenie.*

Dôkaz. Overíme, že i zložené zobrazenie $\varphi \circ \psi$ zachováva lineárne kombinácie. Nech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$, $a, b \in K$. S využitím linearity zobrazení ψ a φ postupne dostávame

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\psi)(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) &= \varphi(\psi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})) = \varphi(a\psi\boldsymbol{x}+b\psi\boldsymbol{y})\\ &= a\varphi(\psi\boldsymbol{x}) + b\varphi(\psi\boldsymbol{y}) = a(\varphi\circ\psi)(\boldsymbol{x}) + b(\varphi\circ\psi)(\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Podľa tvrdenia 6.1.1 to znamená, že zobrazenie $\varphi \circ \psi$ je lineárne.

6.1.3. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K a $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie.*
- *(a) Ak S je lineárny podpriestor priestoru V, tak $\varphi(S)$ je lineárny podpriestor priestoru U.*
- *(b) Ak T je lineárny podpriestor priestoru U, tak $\varphi^{-1}(T)$ je lineárny podpriestor priestoru V.*

Dôkaz. (a) Keďže $\boldsymbol{0} \in S$, $\boldsymbol{0} = \varphi(\boldsymbol{0}) \in \varphi(S)$. Overíme, že obraz $\varphi(S)$ je uzavretý vzhľadom na lineárne kombinácie. Nech $a, b \in K$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \varphi(S)$. Potom existujú $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ také, že $\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{v} = \varphi(\boldsymbol{y})$. S využitím linearity φ dostávame:

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) \in \varphi(S),$$

lebo $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in S$, nakoľko $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor.

(b) Keďže $\varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \in T$, $\boldsymbol{0} \in \varphi^{-1}(T)$. Ukážeme, že aj vzor $\varphi^{-1}(T)$ je uzavretý vzhľadom na lineárne kombinácie. Zvoľme $a, b \in K$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \varphi^{-1}(T)$. To znamená, že $\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y}) \in T$. Z linearity φ vyplýva

$$\varphi(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\varphi(\boldsymbol{y}) \in T,$$

lebo $T \subseteq U$ je lineárny podpriestor. Preto $a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} \in \varphi^{-1}(T)$.

6.1.4. Príklad. Nech K je pole. Distributívnosť súčinu matíc vzhľadom na ich súčet a jeho zameniteľnosť s operáciou skalárneho násobku (pozri odstavec 2.2.2) vlastne hovorí, že pre pevné $m, n, p \in \mathbb{N}$ a ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ je priradením $\boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ definované lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi matíc $K^{n\times p} \to K^{m\times p}$. Podobne je priradením $\boldsymbol{Y} \mapsto \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{A}$ definované lineárne zobrazenie $K^{p\times m} \to K^{p\times n}$. Špeciálne pre $p = 1$ je takto definované lineárne zobrazenie $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}$ medzi stĺpcovými vektorovými priestormi $K^n \to K^m$, resp. lineárne zobrazenie $\boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}$ medzi riadkovými vektorovými priestormi $K^m \to K^n$. Neskôr uvidíme, že každé lineárne zobrazenie medzi *konečnorozmernými* vektorovými priestormi nad K má „v podstate“ takúto podobu.

6.1.5. Príklad. Nech K je pole. Pre $m, n \in \mathbb{N}$ a pevné $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ sú predpismi $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A})$ definované lineárne zobrazenia $K^{m\times n} \to K^{1\times n}$ resp. $K^{m\times n} \to K^{m\times 1}$. Takisto $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^T$ je lineárne zobrazenie $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$.

6.1.6. Príklad. Nech V je vektorový priestor nad poľom K, X je množina a $x \in X$ je pevne zvolený prvok. Pripomeňme, že V^X je vektorový priestor všetkých funkcií $f\colon X \to V$ (pozri 1.6.5). Dosadenie prvku x do funkcie f, t. j. priradenie $f \mapsto f(x)$, je lineárne zobrazenie $V^X \to V$. Podobne, pre ľubovoľnú podmnožinu $Y \subseteq X$ je zúženie $f \mapsto f \restriction Y$ lineárne zobrazenie $V^X \to V^Y$.

6.1.7. Príklad. Označme V množinu všetkých konvergentných postupností reálnych čísel. Zrejme V je lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ všetkých postupností reálnych čísel. Potom zobrazenie $V \to \mathbb{R}$, ktoré postupnosti $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ priradí jej limitu $\lim_{n\to\infty} a_n$, je lineárne.

6.1.8. Príklad. (a) Nech $X \subseteq \mathbb{R}$ a V označuje množinu všetkých zobrazení $X \to \mathbb{R}$, ktoré majú v pevne zvolenom *vnútornom* bode a množiny X konečnú deriváciu. Zrejme V je lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^X$. Potom zobrazenie $V \to \mathbb{R}$, ktoré funkcii $f \in V$ priradí jej deriváciu $f'(a)$ v bode a, je lineárne.

(b) Nech $X \subseteq \mathbb{R}$ je ľubovoľný netriviálny interval. Pripomeňme, že $\mathcal{D}(X)$ označuje lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^X$, tvorený všetkými funkciami $f\colon X \to \mathbb{R}$, ktoré majú v každom bode $x \in X$ konečnú deriváciu (pozri príklad 4.1.3 (c)). Potom derivácia, t. j. priradenie $f \mapsto f'$, je lineárne zobrazenie $\mathcal{D}(X) \to \mathbb{R}^X$.

6.1.9.Príklad. Pre reálne čísla $a < b$ označuje $\mathcal{C}\langle a, b\rangle$ lineárny podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^{\langle a,b\rangle}$, tvorený všetkými spojitými funkciami $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (pozri príklad 4.1.3 (b)).

(a) Určitý integrál $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je lineárne zobrazenie $\mathcal{C}\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.

(b) Podobne, na určitý integrál ako funkciu hornej medze, ktorý funkcii $f \in \mathcal{C}\langle a, b\rangle$ priradí jej primitívnu funkciu $F \in \mathcal{C}\langle a, b\rangle$ danú predpisom

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (a \le x \le b),$$

sa možno dívať ako na lineárne zobrazenie $\mathcal{C}\langle a, b\rangle \to \mathcal{C}\langle a, b\rangle$.

6.2. Jadro a obraz lineárneho zobrazenia

Nech $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi nad poľom K. Jeho *jadrom* nazývame množinu

$$\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in V;\ \varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Obrazom lineárneho zobrazenia φ nazývame, v zhode s paragrafom 0.3, množinu

$$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in V\}.$$

(Označenie pochádza z anglických slov *kernel* a *image*.)

Keďže $\{\mathbf{0}\}$ je lineárny podpriestor priestoru U a V je lineárny podpriestor priestoru V, ako špeciálny prípad tvrdenia 6.1.3 dostávame nasledujúci výsledok.

6.2.1. Tvrdenie. *Nech $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie medzi vektorovými priestormi nad poľom K. Potom $\operatorname{Ker}\varphi$ je lineárny podpriestor priestoru V a $\operatorname{Im}\varphi$ je lineárny podpriestor priestoru U.*

Pomocou pojmov jadra a obrazu možno charakterizovať injektívne resp. surjektívne lineárne zobrazenia.

6.2.2. Veta. *Nech $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom*
(a) φ je injektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;
(b) φ je surjektívne práve vtedy, keď $\operatorname{Im}\varphi = U$.

Dôkaz. (a) Ak φ je injektívne, tak $\mathbf{0} \in V$ je jediný prvok priestoru V, ktorý sa zobrazí na $\mathbf{0} \in U$. Teda $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Naopak, ak φ nie je injektívne, tak existujú $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ také, že $\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{y}$ a $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$. Potom $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \ne \mathbf{0}$ a $\varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, teda $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Inak povedané, $\operatorname{Ker}\varphi \ne \{\mathbf{0}\}$.

(b) je priamo definícia surjektívnosti.

Treba poznamenať, že zakiaľ časť (b) uvedeného tvrdenia je triviálna a platí aj bez predpokladu linearity zobrazenia φ, o časti (a) to už povedať nemožno. Pre všeobecné zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ by sa totiž mohlo stať, že $\mathbf{0} \in V$ je jediný prvok, ktorý sa zobrazí na $\mathbf{0} \in U$, no φ aj tak nie je injektívne. Stále by totiž mohol existovať nejaký vektor $\mathbf{0} \ne \boldsymbol{u} \in U$ a dva rôzne vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ také, že $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{y})$. Spomínané tvrdenie teda hovorí, že lineárne zobrazenia majú značne homogénnu štruktúru, takže ich injektivitu nemusíme zisťovať „všade“ – dá sa rozpoznať už podľa množiny vzorov jediného prvku $\mathbf{0} \in U$.

6.2.3. Veta. *Nech $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie, pričom vektorový priestor V je konečnorozmerný. Potom aj $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ sú konečnorozmerné priestory a platí*

$$\dim V = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi.$$

Dôkaz. Stačí dokázať uvedenú rovnosť pre dimenzie, konečný rozmer podpriestorov $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ je už jej dôsledkom.

Označme $k = \dim\operatorname{Ker}\varphi$, $l = \dim V - k$. Zrejme $l \ge 0$. Nech $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ je nejaká báza priestoru $\operatorname{Ker}\varphi$. Doplňme ju do bázy $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_l$ priestoru V. Potom $\varphi(\boldsymbol{u}_1) = \ldots = \varphi(\boldsymbol{u}_k) = \mathbf{0}$. Dokážeme, že vektory $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{v}_l)$ tvoria bázu priestoru $\operatorname{Im}\varphi$, z čoho už vyplýva požadovaná rovnosť.

Najprv dokážeme, že vektory $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{v}_l)$ generujú podpriestor $\operatorname{Im}\varphi \subseteq U$. Každý vektor $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im}\varphi$ možno vyjadriť v tvare $\boldsymbol{w} = \varphi(\boldsymbol{x})$ pre nejaké $\boldsymbol{x} \in V$, ktoré je vhodnou lineárnou kombináciou $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{u}_k + b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_l\boldsymbol{v}_l$ vektorov $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_l$ bázy priestoru V. Potom

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} = \varphi(\boldsymbol{x}) &= \varphi(a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_k\boldsymbol{u}_k + b_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + b_l\boldsymbol{v}_l)\\ &= a_1\varphi(\boldsymbol{u}_1) + \ldots + a_k\varphi(\boldsymbol{u}_k) + b_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + b_l\varphi(\boldsymbol{v}_l)\\ &= b_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + b_l\varphi(\boldsymbol{v}_l),\end{aligned}$$

teda $\boldsymbol{w} \in [\varphi(\boldsymbol{v}_1), \dots, \varphi(\boldsymbol{v}_l)]$.

Zostáva dokázať lineárnu nezávislosť vektorov $\varphi(\boldsymbol{v}_1),\dots,\varphi(\boldsymbol{v}_l)$. Nech $c_1,\dots,c_l$ sú skaláry také, že $c_1\varphi(\boldsymbol{v}_1)+\dots+c_l\varphi(\boldsymbol{v}_l)=\mathbf{0}$. Potom $\varphi(c_1\boldsymbol{v}_1+\dots+c_l\boldsymbol{v}_l)=\mathbf{0}$, teda $c_1\boldsymbol{v}_1+\dots+c_l\boldsymbol{v}_l\in\operatorname{Ker}\varphi$. Preto sa tento vektor musí dať vyjadriť ako lineárna kombinácia $c_1\boldsymbol{v}_1+\dots+c_l\boldsymbol{v}_l=d_1\boldsymbol{u}_1+\dots+d_k\boldsymbol{u}_k$ vektorov bázy $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k$ podpriestoru $\operatorname{Ker}\varphi$. Z lineárnej nezávislosti bázy $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_l$ priestoru V vyplýva $c_1=\dots=c_l=0=d_1=\dots=d_k$, teda aj nezávislosť vektorov $\varphi(\boldsymbol{v}_1),\dots,\varphi(\boldsymbol{v}_l)$.

Dimenziu obrazu $\operatorname{Im}\varphi$ nazývame *hodnosťou* lineárneho zobrazenia φ a značíme ju

$$h(\varphi)=\dim\operatorname{Im}\varphi.$$

Lineárne zobrazenie $\varphi\colon V\to V$ vektorového priestoru V do seba nazývame *lineárnym operátorom* alebo *lineárnou transformáciou.*

Ako sme spomínali v paragrafe 0.5, transformácia $f\colon X\to X$ konečnej množiny X je injektívna práve vtedy, keď je surjektívna. Ako dôsledok práve dokázanej vety dostávame analogický výsledok aj pre lineárne transformácie konečnorozmerných vektorových priestorov.

6.2.4. Dôsledok. *Nech $\varphi\colon V\to V$ je lineárna transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru V. Potom φ je injektívna práve vtedy, keď je surjektívna.*

Dôkaz. Nech $\dim V=n$. Potom φ je injektívne práve vtedy, keď $\dim\operatorname{Ker}\varphi=0$, a surjektívne práve vtedy, keď $\dim\operatorname{Im}\varphi=n$. Keďže $\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=n$, obe tieto podmienky sú ekvivalenté.

6.3. Lineárne izomorfizmy

Bijektívne lineárne zobrazenie $\varphi\colon V\to U$ medzi vektorovými priestormi V, U nad tým istým poľom K nazývame *lineárny izomorfizmus.* Hovoríme, že vektorové priestory V, U sú *lineárne izomorfné* alebo len krátko *izomorfné*, označenie $V\cong U$, ak existuje nejaký lineárny izomorfizmus $\varphi\colon V\to U$.

6.3.1. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K.*
(a) $\mathrm{id}_V: V\to V$ je lineárny izomorfizmus.
(b) Ak $\varphi\colon V\to U$ je lineárny izomorfizmus, tak aj $\varphi^{-1}\colon U\to V$ je lineárny izomorfizmus.
(c) Ak $\psi\colon W\to V$, $\varphi\colon V\to U$ sú lineárne izomorfizmy, tak aj $\varphi\circ\psi\colon W\to U$ je lineárny izomorfizmus.

Dôkaz. (a) je triviálne, (c) vyplýva z toho, že kompozícia bijekcií je bijekcia a kompozícia lineárnych zobrazení je lineárne zobrazenie. Zostáva dokázať (b). Treba overiť, že inverzné zobrazenie $\varphi^{-1}\colon U\to V$ k lineárnej bijekcii $\varphi\colon V\to U$ je tiež lineárne (jeho bijektívnosť je totiž zrejmá).

Zvoľme $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in U$, $a,b\in K$. Máme dokázať rovnosť

$$\varphi^{-1}(a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v})=a\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})+b\varphi^{-1}(\boldsymbol{v}),$$

ktorá je ekvivalentná s podmienkou

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\varphi\big(a\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})+b\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})\big).$$

Vďaka linearite φ a vzťahu $\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}_U$ naozaj dostávame

$$\varphi\big(a\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})+b\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})\big)=a\varphi\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})+b\varphi\varphi^{-1}(\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}.$$

Z práve dokázaného tvrdenia okamžite vyplýva nasledujúci dôsledok.

6.3.2. Dôsledok. *Pre ľubovoľné vektorové priestory U, V, W nad tým istým poľom platí:*
(a) $V\cong V$;
(b) $V\cong U\Rightarrow U\cong V$;
(c) $W\cong V$ & $V\cong U\Rightarrow W\cong U$.

Hovoríme, že vzťah izomorfnosti $\cong$ je *reflexívny*, *symetrický* a *tranzitívny*, t. j. je vzťahom *ekvivalencie.* Z formálneho hľadiska s ním teda môžeme narábať podobne ako so vzťahom rovnosti $=$.

Izomorfné vektorové priestory majú rovnakú štruktúru, líšia sa nanajvýš označením svojich prvkov, nie však vzťahmi medzi nimi. Preto ich možno v prípade potreby stotožniť, či nahradiť jeden vektorový priestor jeho izomorfnou kópiou. Z toho dôvodu je dôležité mať k dispozícii vhodnú triedu vektorových priestorov nad daným poľom, ktorá by pre každý vektorový priestor obsahovala nejaký priestor s ním izomorfný.

6.3.3. Príklad. (a) Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom K, $\dim V=n$ a $\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ je nejaká jeho báza. Potom tvrdenie 5.3.2 vlastne hovorí, že súradnicové zobrazenie $\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$ je lineárny izomorfizmus $V\to K^n$.

(b) Podobne možno nahliadnuť, že (i v nekonečnorozmernom prípade) určuje Hamelova báza X vektorového priestoru V súradnicové zobrazenie $\boldsymbol{v}\mapsto(\boldsymbol{v})_X$, ktoré je lineárnym izomorfizmom $V\to K^{(X)}$ (pozri záver paragrafu 5.5).

Na záver tohto paragrafu ešte ukážeme, že typ izomorfizmu daného konečnorozmerného priestoru je jednoznačne určený jeho dimenziou.

6.3.4. Veta. *Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K. Potom*

$$V\cong U\ \Leftrightarrow\ \dim V=\dim U.$$

Dôkaz. Nech $V\cong U$ a $\varphi: V\to U$ je lineárny izomorfizmus. Potom $\operatorname{Ker}\varphi=\{\mathbf{0}\}$ a $\operatorname{Im}\varphi=U$ Podľa vety 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu

$$\dim V=\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=0+\dim U=\dim U.$$

Naopak, nech $\dim V=\dim U=n$. Podľa príkladu 6.3.3 (a) platí $V\cong K^n\cong U$.

Teda konečnorozmerný vektorový priestor V nad poľom K je izomorfný so stĺpcovým (no rovnako aj s riadkovým) vektorovým priestorom K^n práve vtedy, keď $n=\dim V$. Pritom každá báza $\boldsymbol{\beta}$ priestoru V určuje jeden takýto izomorfizmus $V\to K^n$ – je ním súradnicové zobrazenie $\boldsymbol{x}\mapsto(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$.

6.4. Matica lineárneho zobrazenia

Uvažujme nejaké lineárne zobrazenie $\varphi\colon K^n\to K^m$. V priestore K^n máme kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$. Keďže obrazy $\varphi(\boldsymbol{e}_j)$ vektorov tejto bázy sú stĺpcové vektory z priestoru K^m, môžeme vytvoriť maticu

$$\boldsymbol{A}=(\varphi(\boldsymbol{e}_1),\dots,\varphi(\boldsymbol{e}_n))\in K^{m\times n},$$

ktorej stĺpcami sú práve tieto vektory, t. j. platí $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) = \varphi(\boldsymbol{e}_j)$ pre $1 \le j \le n$. Ukážeme, ako možno obraz $\varphi(\boldsymbol{x})$ ľubovoľného vektora $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ vypočítať len zo znalosti tejto matice. Uvedomme si, že $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{e}_n$, a počítajme

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}) &= \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\varphi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n\varphi(\boldsymbol{e}_n)\\ &= (\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{A}), \dots, \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{A})) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

Teda *každé* lineárne zobrazenie $\varphi\colon K^n \to K^m$ má tvar $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}$ pre vhodnú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$. Keďže každý konečnorozmerný vektorový priestor nad poľom K je izomorfný s priestorom K^n pre $n = \dim V$, pri voľbe pevných báz v konečnorozmerných priestoroch U, V bude možné ľubovoľné lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to U$ zakódovať pomocou vhodnej matice $\boldsymbol{A}$.

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K, $\dim U = m$, $\dim V = n$ a $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ sú bázy v U, resp. vo V. *Maticou lineárneho zobrazenia* $\varphi\colon V \to U$ *vzhľadom na bázy* $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ nazývame maticu

$$\boldsymbol{A} = \big((\varphi\boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi\boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \in K^{m\times n},$$

ktorej stĺpce sú tvorené súradnicami obrazov $\varphi(\boldsymbol{v}_j)$ vektorov bázy $\boldsymbol{\beta}$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$, t. j. platí $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A}) = (\varphi\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}}$ pre $1 \le j \le n$. Túto maticu značíme tiež

$$\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

(Všimnite si obrátené poradie znakov báz voči poradiu vektorových priestorov v označení zobrazenia $\varphi\colon V \to U$.)

Maticu $\boldsymbol{A}$ zo začiatku tohto paragrafu by sme teda mohli nazvať *maticou lineárneho zobrazenia* $\varphi\colon K^n \to K^m$ *vzhľadom na kanonické bázy* $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$. Pokiaľ nepovieme inak, budeme pod maticou lineárneho zobrazenia $\varphi\colon K^n \to K^m$ medzi stĺpcovými vektorovými priestormi vždy rozumieť maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)},\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}}$ zobrazenia φ vzhľadom na kanonické bázy.

Pokiaľ budeme skúmať lineárne transformácie $\varphi\colon V \to V$ konečnorozmerného vektorového priestoru V, budeme väčšinou vzory i obrazy vektorov z V vyjadrovať v tej istej báze. *Maticou lineárnej transformácie* $\varphi\colon V \to V$ vzhľadom na bázu $\boldsymbol{\alpha}$ priestoru V teda rozumieme maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}$.

Pri dôkaze nasledujúcej vety bude potrebné si uvedomiť, že $(\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{e}_j^{(n)}$ pre ľubovoľný vektor $\boldsymbol{v}_j$ bázy $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ priestoru V. Z toho je zrejmé, že pre každú bázu $\boldsymbol{\beta}$ n-rozmerného vektorového priestoru V platí

$$(\mathrm{id}_V)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{I}_n.$$

6.4.1. Veta. *Nech $\varphi\colon V \to U$ je lineárne zobrazenie medzi konečnorozmernými vektorovými priestormi nad poľom K, $\dim V = n$, $\dim U = m$ a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ sú bázy priestorov U resp. V. Potom pre všetky $\boldsymbol{x} \in V$ platí*

$$(\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

a $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je jediná matica s touto vlastnosťou.

Dôkaz. Nech $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$. Zvoľme ľubovoľný vektor $\boldsymbol{x} \in V$ a označme $(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}} = (x_1, \dots, x_n)^T$, teda $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{v}_n$. Podobne ako v špeciálnom prípade zo začiatku tohto paragrafu, i teraz dostávame

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}) &= \varphi(x_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n) = x_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + x_n\varphi(\boldsymbol{v}_n),\\ (\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} &= \big(x_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + x_n\varphi(\boldsymbol{v}_n)\big)_{\boldsymbol{\alpha}} = x_1(\varphi\boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}} + \ldots + x_n(\varphi\boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\\ &= \big((\varphi\boldsymbol{v}_1)_{\boldsymbol{\alpha}}, \dots, (\varphi\boldsymbol{v}_n)_{\boldsymbol{\alpha}}\big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}.\end{aligned}$$

Zostáva ukázať, že pre ľubovoľnú maticu $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ platí

$$\big(\forall\, \boldsymbol{x} \in V\big)\big((\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}\big) \Rightarrow \boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

Za uvedeného predpokladu voľbou $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_j$ dostávame

$$(\varphi\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{v}_j)_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{A})$$

pre každé $1 \le j \le n$. Teda matice $\boldsymbol{A}$ a $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ majú rovnaké stĺpce, preto sa rovnajú.

Matica $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ lineárneho zobrazenia $\varphi\colon V \to U$ z n-rozmerného vektorového priestoru V do m-rozmerného vektorového priestoru U nad poľom K vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je teda medzi všetkými maticami $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ jednoznačne určená podmienkou

$$(\varphi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}$$

pre každé $\boldsymbol{x} \in V$.

Ďalej si ukážeme, že skladanie lineárnych zobrazení zodpovedá násobeniu matíc, čo umožňuje vypočítať maticu kompozície lineárnych zobrazení $\varphi\circ\psi$ len zo znalosti matíc jednotlivých zobrazení φ a ψ. Tento výsledok definitívne „ospravedlňuje“ spôsob, akým sme súčin matíc definovali v odstavci 2.2.2.

6.4.2. Veta. *Nech U, V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K, $\boldsymbol{\alpha}$ je báza U, $\boldsymbol{\beta}$ je báza V a $\boldsymbol{\gamma}$ je báza W. Potom pre ľubovoľné lineárne zobrazenia $\psi\colon W \to V$, $\varphi\colon V \to U$ platí*

$$(\varphi\circ\psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} \cdot (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}.$$

Dôkaz. Označme $\boldsymbol{A} = (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ maticu lineárneho zobrazenia φ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{B} = (\psi)_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}}$ maticu lineárneho zobrazenia ψ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta}$. Dokážeme rovnosť

$$(\varphi\circ\psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}.$$

Na základe definície matíc $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ pre ľubovoľné $\boldsymbol{x} \in U$ platí

$$\begin{aligned}\big((\varphi\circ\psi)\boldsymbol{x}\big)_{\boldsymbol{\alpha}} &= \big(\varphi(\psi\boldsymbol{x})\big)_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{A}\cdot(\psi\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\beta}}\\ &= \boldsymbol{A}\cdot\big(\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\gamma}}\big) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{x})_{\boldsymbol{\gamma}}.\end{aligned}$$

Keďže matica kompozície $\varphi\circ\psi$ vzhľadom na bázy $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je podľa vety 6.4.1 touto podmienkou určená jednoznačne, dôkaz je hotový.

V nasledujúcich príkladoch sa zoznámime s niekoľkými dôležitými lineárnymi transformáciami roviny $\mathbb{R}^2$ a ich maticami vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

6.4.3. Príklad. *Otočenie* roviny okolo počiatku o uhol $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineárne zobrazenie $\boldsymbol{R}_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Homogenita je zrejmá na prvý pohľad. O aditivite sa presvedčíme nasledujúcou úvahou. Ak otočíme rovnobežník vektorov $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ o uhol α, dostaneme tak rovnobežník prislúchajúci vektorom $\boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{y})$. Pritom uhlopriečka prvého rovnobežníka prejde na uhlopriečku druhého. Teda $\boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{y})$ (nakreslite si obrázok). Maticu tohto lineárneho zobrazenia vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}$ budeme značiť rovnako $\boldsymbol{R}_\alpha$, teda pre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ budeme písať $\boldsymbol{R}_\alpha(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}$. Jej stĺpce získame otočením vektorov $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^T$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$ o uhol α. Z definície goniometrických funkcií sínus a kosínus pomocou jednotkovej kružnice priamo dostávame

$$\boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a obrazom ľubovoľného vektora $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ v otočení $\boldsymbol{R}_\alpha$ je vektor

$$\boldsymbol{R}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

6.4.4. Príklad. *Osová súmernosť* roviny podľa ľubovoľnej priamky prechádzajúcej počiatkom definuje zobrazenie $\boldsymbol{S}_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je uhol, ktorý zviera os súmernosti s osou x. Obdobnou úvahou ako v prípade otočení možno nahliadnuť, že i $\boldsymbol{S}_\alpha$ je lineárne zobrazenie. Jeho maticu vzhľadom na kanonickú bázu $\boldsymbol{\varepsilon}$ budeme značiť rovnako $\boldsymbol{S}_\alpha$. Zrejme matica súmernosti podľa osi x je

$$\boldsymbol{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a osovú súmernosť $\boldsymbol{S}_\alpha$ možno dostať ako kompozíciu otočenia $\boldsymbol{R}_{-\alpha}$, osovej súmernosti $\boldsymbol{S}_0$ a otočenia $\boldsymbol{R}_\alpha$, t. j.

$$\boldsymbol{S}_\alpha = \boldsymbol{R}_\alpha \cdot \boldsymbol{S}_0 \cdot \boldsymbol{R}_{-\alpha}.$$

Po vynásobení príslušných matíc z toho s využitím pár trigonometrických vzorcov dostávame

$$\boldsymbol{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Teda osová súmernosť $\boldsymbol{S}_\alpha$ zobrazí vektor $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ do vektora

$$\boldsymbol{S}_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \\ x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

6.4.5. Príklad. *Rovnoľahlosť* alebo tiež *homotetia* so stredom v počiatku a s koeficientom podobnosti $0 \neq c \in \mathbb{R}$ je opäť lineárne zobrazenie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s maticou $c\boldsymbol{I}_2 = \operatorname{diag}(c,c)$. Tento príklad možno zrejmým spôsobom zovšeobecniť na ľubovoľnú dimenziu n.

6.4.6. Príklad. *Skosenie v smere osi x s parametrom a.* Pre ľubovoľné $a \in \mathbb{R}$ je priradením

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

definovaná lineárna transformácia roviny, ktorá posúva každú jej „vodorovnú vrstvu“ $\{(x,y);\ y = s\}$, $s \in \mathbb{R}$, o vektor $as\boldsymbol{e}_1$ (nakreslite si obrázok). Analogické lineárne transformácie fungujú aj vo viacrozmerných priestoroch $\mathbb{R}^n$ ako aj v konečnorozmerných vektorových priestoroch nad ľubovoľným poľom.

6.4.7. Príklad. *Galileova transformácia* „roviny“, alebo skôr „časopriamky“ $\mathbb{R}^2$ je z formálneho hľadiska totožná so skosením v smere časovej osi t s parametrom $a = -v$:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= -vt + x, \end{aligned} \qquad \text{t. j.} \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

Ak k týmto rovniciam ešte doplníme $y' = y$, $z' = z$, dostaneme Galileova transformáciu „časopriestoru“ $\mathbb{R}^4$. Vektor $(t,x,y,z)^T$ interpretujeme ako súradnice času (t) a polohy (x,y,z), ktoré nejakej okamžitej bodovej udalosti v trojrozmernom fyzikálnom priestore priradí pozorovateľ P, a vektor $(t',x',y',z')^T$ ako súradnice, ktoré jej priradí pozorovateľ P', ktorý sa vzhľadom na P pohybuje rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v v smere osi x (pričom počiatky ich súradných sústav sú zhodne stanovené okamihom a miestom ich stretnutia, kedy tiež splývajú ich príslušné súradné osi). Galileova transformácia potom udáva vzťah medzi týmito súradnicami, ku ktorému dospejeme na základe princípov klasickej mechaniky. Je v nej zachytený newtonovský princíp absolútneho času a priestoru, rovnakého pre všetkých pozorovateľov nezávisle od ich pohybu, a galileovský princíp relatívnosti pohybu, ktorý sa prejavuje v rovnocennosti súradných sústav ľubovoľných navzájom rovnomerne priamočiaro sa pohybujúcich pozorovateľov. Je známe, že Galileova transformácia sa veľmi dobre zhoduje so skutočnosťou pre rýchlosti v z „bežného života“, ktoré sú malé v porovnaní s rýchlosťou svetla. Pre rýchlosti blízke rýchlosti svetla však stráca svoju platnosť a treba ju nahradiť tzv. Lorentzovou transformáciou, s ktorou sa zoznámime neskôr.

6.5. Priestory lineárnych zobrazení

Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Ak zabudneme na štruktúru vektorového priestoru vo V, t. j. V budeme považovať len za množinu, môžeme vytvoriť vektorový priestor U^V *všetkých* zobrazení $f\colon V \to U$ s operáciami súčtu a skalárneho násobku definovanými po zložkách (pozri odstavec 1.6.5). Potom pre množinu $\mathcal{L}(V,U)$ všetkých *lineárnych* zobrazení $\varphi\colon V \to U$, samozrejme, platí $\mathcal{L}(V,U) \subseteq U^V$.

6.5.1. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K. Potom $\mathcal{L}(V,U)$ je lineárny podpriestor vektorového priestoru U^V. Teda $\mathcal{L}(V,U)$ je vektorový priestor nad poľom K.*

Dôkaz. Treba overiť, že pre ľubovoľné $a, b \in K$ lineárna kombinácia $\vartheta = a\varphi + b\psi$ lineárnych zobrazení $\varphi, \psi\colon V \to U$, definovaná pre $\boldsymbol{x} \in V$ predpisom

$$\vartheta(\boldsymbol{x}) = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\psi(\boldsymbol{x}),$$

je tiež lineárne zobrazenie $\vartheta\colon V \to U$. Zvoľme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $c, d \in K$. Priamym výpočtom dostávame

$$\begin{aligned}\vartheta(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) &= a\varphi(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) + b\psi(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) = a(c\varphi(\boldsymbol{x})+d\varphi(\boldsymbol{y})) + b(c\psi(\boldsymbol{x})+d\psi(\boldsymbol{y}))\\ &= c(a\varphi(\boldsymbol{x})+b\psi(\boldsymbol{x})) + d(a\varphi(\boldsymbol{y})+b\psi(\boldsymbol{y})) = c\vartheta(\boldsymbol{x}) + d\vartheta(\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

Teda $\vartheta \in \mathcal{L}(V, U)$.

6.5.2. Tvrdenie. *Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K a $\dim U = m$, $\dim V = n$. Potom*

$$\mathcal{L}(V, U) \cong K^{m\times n},$$

teda $\dim \mathcal{L}(V, U) = mn$.

Dôkaz. Zvoľme bázy $\boldsymbol{\alpha}$ v priestore U a $\boldsymbol{\beta}$ v priestore V. Z výsledkov predchádzajúceho paragrafu vyplýva, že priradenie $\varphi \mapsto (\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ je bijekcia $\mathcal{L}(V, U) \to K^{m\times n}$. Stačí teda dokázať, že je to aj lineárne zobrazenie, to znamená, že pre $a, b \in K$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V, U)$ platí

$$(a\varphi + b\psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = a(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} + b(\psi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}.$$

To je však zrejmé. Čitateľovi, ktorý má nejaké pochybnosti, odporúčame, aby si jednoduchým výpočtom porovnal stĺpce matíc na ľavej a pravej strane.

Na maticu $(\varphi)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}$ sa teda možno dívať ako na súradnice vektora $\varphi \in \mathcal{L}(V, U)$ v priestore $K^{m\times n}$, vzhľadom na dvojicu báz $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}$.

Lineárne zobrazenie $\varphi\colon V \to K$ z vektorového priestoru V do poľa K sa nazýva *lineárny funkcionál* alebo *lineárna forma* na V. Vektorový priestor $\mathcal{L}(V, K)$ všetkých lineárnych foriem na V sa nazýva *duálny priestor* alebo len krátko *duál* vektorového priestoru V. Budeme používať označenie $\mathcal{L}(V, K) = V^*$

Keďže v poli K budeme vždy uvažovať len kanonickú bázu pozostávajúcu z jediného vektora $1 \in K$, ľubovoľná báza $\boldsymbol{\beta}$ v konečnorozmernom priestore V určuje lineárny izomorfizmus $V^* \to V$ daný predpisom $\varphi \mapsto (\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$. Tým sme dokázali nasledujúce tvrdenie.

6.5.3. Tvrdenie. *Pre ľubovoľný konečnorozmerný vektorový priestor V nad poľom K platí $V^* \cong V$.*

Uvedomme si, že matica $(\varphi)_{1,\boldsymbol{\beta}}$ lineárneho funkcionálu $\varphi\colon V \to K$ je riadkový vektor z priestoru $K^{1\times n}$. To nám odkrýva nový pohľad na vektorový priestor riadkov $K^{1\times n}$. Pri voľbe kanonickej bázy $\boldsymbol{\varepsilon}$ v stĺpcovom priestore $K^{n\times 1}$ možno riadkový priestor $K^{1\times n}$ stotožniť s duálom $\left(K^{n\times 1}\right)^*$ stĺpcového priestoru $K^{n\times 1}$.

Ešte raz podčiarknime, že izomorfizmus konečnorozmerného priestoru V a jeho duálu V^* závisí od výberu bázy vo V. Na druhej strane, pre ľubovoľný vektorový priestor V možno definovať kanonické, t. j. od výberu bázy nezávislé zobrazenie z priestoru V do jeho *druhého duálu* V^{**} dané predpisom $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}}$, kde

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{x})$$

pre $\boldsymbol{x} \in V$, $\varphi \in V^*$.

6.5.4. Veta. *Nech V je vektorový priestor nad poľom K. Potom*
(a) $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}}$ je injektívne lineárne zobrazenie $V \to V^{**}$;
(b) ak V je konečnorozmerný, tak $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}}$ je lineárny izomorfizmus $V \to V^{**}$.

Dôkaz. Najprv ukážeme, že pre každé $\boldsymbol{x} \in V$ vôbec platí $\widehat{\boldsymbol{x}} \in V^{**}$, t. j. $\widehat{\boldsymbol{x}}$ je lineárny funkcionál na priestore V^*. Pre $\varphi, \psi \in V^*$, $a, b \in K$ jednoduchý výpočet dáva

$$\widehat{\boldsymbol{x}}(a\varphi + b\psi) = (a\varphi + b\psi)(\boldsymbol{x}) = a\varphi(\boldsymbol{x}) + b\psi(\boldsymbol{x}) = a\widehat{\boldsymbol{x}}(\varphi) + b\widehat{\boldsymbol{x}}(\psi).$$

(a) Pre $\boldsymbol{x} \in V$ označme $\widehat{\boldsymbol{x}} = \eta(\boldsymbol{x})$. Dokážeme, že $\eta\colon V \to V^{**}$ je lineárne zobrazenie. Zvoľme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ $c, d \in K$. Treba overiť, že zobrazenia $\eta(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y})$ a $c\eta(\boldsymbol{x}) + d\eta(\boldsymbol{y})$ sa rovnajú, t. j. že každému $\varphi \in V^*$ priradia tú istú hodnotu. Počítajme

$$\begin{aligned}\eta(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y})(\varphi) &= \varphi(c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}) = c\varphi(\boldsymbol{x}) + d\varphi(\boldsymbol{y})\\ &= c\widehat{\boldsymbol{x}}(\varphi) + d\widehat{\boldsymbol{y}}(\varphi) = (c\eta(\boldsymbol{x}) + d\eta(\boldsymbol{y}))(\varphi).\end{aligned}$$

Injektívnosť zobrazenia η spoznáme podľa jeho jadra. Stačí si uvedomiť, že pre ľubovoľné $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in V$ existuje $\varphi \in V^*$ také, že $\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$ (rozmyslite si prečo). Potom

$$\eta(\boldsymbol{x})(\varphi) = \widehat{\boldsymbol{x}}(\varphi) = \varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0,$$

teda $\eta(\boldsymbol{x})$ sa nerovná identicky nulovému zobrazeniu $\mathbf{0}\colon V^* \to K$, ktoré je nulou vo V^{**}. Preto $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker}\eta$ pre $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, čiže $\operatorname{Ker}\eta = \{\mathbf{0}\}$.

(b) Ak V je konečnorozmerný, tak s vyžitím vety 6.2.3, už dokázanej časti (a) a tvrdenia 6.5.3 dostávame

$$\dim \operatorname{Im}\eta = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\eta = \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}.$$

Preto η je i surjektívne.

Teda každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ definuje lineárny funkcionál $\widehat{\boldsymbol{x}}$ na duálnom priestore V^*. Pritom konečnorozmerný vektorový priestor V možno prostredníctvom priradenia $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}}$ *prirodzene* stotožniť s duálom priestoru V^*. Napr. stĺpcový priestor $K^{n\times 1}$ možno tak stotožniť s duálom riadkového priestoru $K^{1\times n}$. Vo všeobecnom prípade možno V stotožniť s lineárnym podpriestorom $\operatorname{Im}\eta = \{\widehat{\boldsymbol{x}};\ \boldsymbol{x} \in V\}$ jeho druhého duálu V^{**}.

Poznámka. Prostriedkami, ktoré presahujú rámec tohto kurzu, možno dokázať, že $V \ncong V^*$ a $V \ncong V^{**}$ pre každý nekonečnorozmerný vektorový priestor V. Zjednodušene povedané, duál V^* je vždy „podstatne väčší“ než pôvodný priestor V a druhý duál V^{**} je „ešte väčší“. Teda ani $\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}}$ nemôže byť surjektívne zobrazenie $V \to V^{**}$.