1. POLIA A VEKTOROVÉ PRIESTORY

V tejto kapitole zavedieme dva pojmy, ktoré budú hrať v celom ďalšom výklade kľúčovú úlohu, a dokážeme o nich niekoľko jednoduchých základných tvrdení. Ide o pojem *poľa* a pojem *vektorového priestoru*.

Prvky poľa budeme nazývať *skaláry* a niekedy len čísla. Fyzikálne ich možno interpretovať ako hodnoty fyzikálnych veličín, ktoré sú určené len svojou veľkosťou a znamienkom. Prvky vektorového priestoru, t. j. *vektory* zasa zodpovedajú fyzikálnym veličinám, ktoré sú okrem veľkosti určené tiež smerom a orientáciou.

1.1. Základné číselné obory

Predpokladáme, že čitateľ pozná základné číselné obory, ako sú *prirodzené čísla*, *celé čísla*, *racionálne čísla*, *reálne čísla* a *komplexné čísla*. Každý z týchto číselných oborov tvorí množinu. Dohodneme sa, že ich budeme označovať tzv. tučnými tabuľovými písmenami:

$\mathbb{N}$ – množina všetkých prirodzených čísel,
$\mathbb{Z}$ – množina všetkých celých čísel,
$\mathbb{Q}$ – množina všetkých racionálnych čísel,
$\mathbb{R}$ – množina všetkých reálnych čísel,
$\mathbb{C}$ – množina všetkých komplexných čísel.

Ešte poznamenajme, že i nulu považujeme za prirodzené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$. *Imaginárnu jednotku* (ktorá je prvkom $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$) budeme značiť i.

Konštatovaním, že uvedené číselné obory tvoria množiny, sme však ich štruktúru zďaleka nevyčerpali. Omnoho dôležitejšie je, že na každej z týchto množín sú definované dve binárne operácie, *sčítanie* $+$ a *násobenie* $\cdot$. Pritom na každej z uvedených množín sú obe tieto operácie asociatívne a komutatívne. Navyše, násobenie je (z oboch strán) *distributívne* vzhľadom na sčítanie, t. j. pre všetky prvky x, y, z príslušnej množiny platí

$$x(y+z) = xy + xz, \qquad (x+y)z = xz + yz.$$

Číselný obor $\mathbb{N}$ je v porovnaní s obormi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ akýsi „chudobnejší“ – kým rovnice tvaru $x + a = b$ majú v oboroch $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ riešenie $x = b - a$ pre ľubovoľné a, b, v $\mathbb{N}$ je takáto rovnica riešiteľná len ak $a \leq b$. Obory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ sú však „bohatšie“ nielen v porovnaní s $\mathbb{N}$ no i so $\mathbb{Z}$ – rovnice tvaru $ax = b$ majú v oboroch $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ riešenie pre ľubovoľné $a \neq 0$ a b, kým v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{Z}$ sú riešiteľné len ak a je deliteľom b.

Nás budú zaujímať práve vlastnosti číselných oborov $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ s operáciami sčítania a násobenia. Pritom využijeme, že uvedené operácie na týchto oboroch majú rad spoločných vlastností, čo nám umožňuje skúmať ich do veľkej miery jednotným spôsobom a súčasne. To dosiahneme tým, že sformulujeme abstraktný pojem *poľa*, pod ktorý zahrnieme všetky spomínané prípady, ako i mnohé ďalšie, ktoré sa nám objavia až akosi dodatočne. Ako sme spomínali už v úvode, práve takýto prístup je charakteristický pre algebru, presnejšie, v ňom spočíva jej podstata.

1.2. Polia

Poľom nazývame množinu K s dvoma význačnými prvkami – *nulou* 0 a *jednotkou* 1 – a dvomi binárnymi operáciami na K – *sčítaním* $+$ a *násobením* $\cdot$ – takými, že platí

$$\begin{array}{ll}
(\forall\, a,b \in K)(a+b = b+a), & (\forall\, a,b \in K)(a\cdot b = b\cdot a),\\
(\forall\, a,b,c \in K)(a+(b+c) = (a+b)+c), & (\forall\, a,b,c \in K)(a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c),\\
(\forall\, a \in K)(a+0 = a), & (\forall\, a \in K)(1\cdot a = a),\\
(\forall\, a \in K)(\exists\, b \in K)(a+b = 0), & (\forall\, a \in K \smallsetminus \{0\})(\exists\, b \in K)(a\cdot b = 1),\\
(\forall\, a,b,c \in K)(a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)), & 0 \neq 1.
\end{array}$$

Teda sčítanie a násobenie v poli sú komutatívne a asociatívne operácie a násobenie je distributívne vzhľadom na sčítanie. Ďalej 0 je neutrálny prvok sčítania a 1 je neutrálny prvok násobenia, pričom tieto dva prvky sú rôzne. Napokon nahliadneme, že prvok $b \in K$ taký, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačne. Naozaj, keby existovali dva také prvky b_1, b_2, tak

$$b_1 = b_1 + 0 = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = 0 + b_2 = b_2.$$

Tento jednoznačne určený prvok k danému a označujeme $-a$ a nazývame *opačný prvok* k a. Miesto $a + (-b)$ zvykneme písať len $a - b$. Celkom analogicky sa možno presvedčiť, že aj prvok $b \in K$ taký, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačne – označujeme ho a^{-1} alebo $\frac{1}{a}$, prípadne $1/a$ a nazývame *inverzný prvok* k a alebo *prevrátená hodnota* prvku a. Miesto $a \cdot b^{-1}$ píšeme tiež $\frac{a}{b}$ alebo a/b.

Znak násobenia budeme väčšinou vynechávať a násobenie bude mať prednosť pred sčítaním, teda napr. miesto $(a \cdot b) + c$ budeme písať len $ab + c$. Asociatívnosť nám umožňuje vynechávať zátvorky a súčty či súčiny ľubovoľných konečných postupností prvkov poľa jednoznačne zapisovať v tvare $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ resp. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ prípadne len $a_1 a_2 \ldots a_n$; komutatívnosť nám navyše dovoľuje nestarať sa o poradie sčítancov resp. činiteľov. Kvôli úplnosti sa dohodneme, že pre $n = 1$ sa oba uvedené výrazy rovnajú a_1; pre $n = 0$ kladieme prázdny súčet rovný 0 a prázdny súčin rovný 1. Ak $a_1 = \ldots = a_n = a$, tak miesto $a_1 + \ldots + a_n$ píšeme na a miesto $a_1 \ldots a_n$ len a^n.

Teraz si ukážeme, ako možno niektoré najzákladnejšie pravidlá počítania, na ktoré sme zvyknutý v číselných oboroch $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, odvodiť len z axióm poľa. Zhrnieme ich do nasledujúceho tvrdenia. Okrem iného z neho vyplýva, že k 0 nemôže v poli existovať inverzný prvok (podmienka (c)).

1.2.1. Tvrdenie. *Nech K je pole. Potom pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \ldots, b_n \in K$ platí*

(a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c$,
(b) $(ab = ac \;\&\; a \neq 0) \Rightarrow b = c$,
(c) $a0 = 0$,
(d) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$,
(e) $-a = (-1)a$,
(f) $a(b - c) = ab - ac$,
(g) $a(b_1 + \ldots + b_n) = ab_1 + \ldots + ab_n$.

Dôkaz. (a), (b) Keďže obe podmienky možno dokázať v podstate rovnako, urobíme to len pre druhú z nich. Z $ab = ac$ vyplýva $a^{-1}ab = a^{-1}ac$. Ľavá strana sa rovná b a pravá c.

(c) $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0 = a0 + 0$. Podľa (a) z toho vyplýva $a0 = 0$.

(d) Nech $ab = 0$. Potom podľa (c) $ab = 0 = a0$. Ak $a \neq 0$, tak podľa (b) z toho vyplýva $b = 0$.

(e) Vďaka jednoznačnosti opačného prvku k a stačí overiť, že $(-1)a + a = 0$. Jednoduchý výpočet dáva $(-1)a + a = (-1)a + 1a = (-1 + 1)a = 0a = 0$ podľa (c).

(f) Podľa (e) $a(b - c) = a(b + (-1)c) = ab + a(-1)c = ab + (-1)ac = ab - ac$.

(g) Rovnosť zrejme platí pre $n = 0, 1, 2$. Keby neplatila pre všetky prirodzené čísla, označme n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré existujú $a, b_1, \dots, b_n \in K$ také, že uvedená rovnosť neplatí. Potom $n > 2$ a pre $n - 1$ rovnosť platí. Preto

$$a(b_1 + \dots + b_{n-1} + b_n) = a(b_1 + \dots + b_{n-1}) + ab_n = ab_1 + \dots + ab_{n-1} + ab_n.$$

To je však spor.

Doplňme, že podmienky (a) a (b) sa nazývajú *zákony o krátení* pre sčítanie resp. násobenie v poli.

Podmienka (e) nám umožňuje zaviesť ľubovoľné celočíselné násobky prvkov z poľa. Pre $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ kladieme $(-n)a = -(na) = n(-a)$. Podobne možno pre nenulové prvky poľa zaviesť i ľubovoľné celočíselné mocniny. Pre $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ kladieme $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

Čitateľovi prenechávame, aby si sám odvodil nasledujúce rovnosti známe z bežných číselných oborov:

$$
\begin{array}{ll}
0a = 0, \quad 1a = a, & a \in K, \\
n(a + b) = na + nb, & a, b \in K,\ n \in \mathbb{Z}, \\
(m + n)a = ma + na, & a \in K,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\
(mn)a = m(na), & a \in K,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\
(mn)(ab) = (ma)(nb), & a, b \in K,\ m, n \in \mathbb{Z}, \\
a^0 = 1, \quad a^1 = a, & a \in K, \\
(ab)^n = a^n b^n, & a, b \in K,\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0 \Rightarrow a \neq 0 \neq b, \\
a^{m+n} = a^m a^n, & a \in K,\ m, n \in \mathbb{Z},\ (m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0, \\
a^{mn} = (a^m)^n, & a \in K,\ m, n \in \mathbb{Z},\ (m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0,
\end{array}
$$

Ešte podotýkame, že v rovnostiach v prvom a šiestom riadku označujú 0 a 1 na ľavých stranách prirodzené čísla, t. j. prvky množiny $\mathbb{N}$, kým 0 a 1 na pravých stranách v prvom riadku označujú prvky poľa K. Vzhľadom na to, že pre všetky tri príklady polí, s ktorými sme doteraz stretli, platí $\mathbb{N} \subseteq K$, môže sa nám toto rozlíšenie zdať nepodstatné. Vo všeobecnosti však uvedená inklúzia platiť nemusí.

Nech K je pole a $L \subseteq K$. Hovoríme, že L je *podpole* poľa K, ak $0, 1 \in L$ a pre všetky $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, ak $a \neq 0$, tak aj $a^{-1} \in L$. Inak povedané, podpole poľa K je taká jeho podmnožina L, ktorá obsahuje nulu a jednotku a je uzavretá vzhľadom na sčítanie, násobenie, opačný a inverzný prvok. Zrejme každé

podpole poľa K je s týmito operáciami zúženými z K na L i samo poľom. Hovoríme tiež, že pole K je *rozšírením* poľa L.

Zrejme pole $\mathbb{Q}$ je podpoľom poľa $\mathbb{R}$ i poľa $\mathbb{C}$; pole $\mathbb{C}$ je rozšírením poľa $\mathbb{Q}$ aj $\mathbb{R}$.

Charakteristikou poľa K, označenie $\operatorname{char} K$, nazývame najmenšie kladné celé číslo n také, že $n1 = 0$; ak také n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pre každé celé $n > 0$, hovoríme že K má charakteristiku ∞ (niektorí autori vtedy kladú $\operatorname{char} K = 0$).

Ak pole K je rozšírením poľa L, tak polia K a L majú tú istú jednotku, preto $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$.

Zrejme $\operatorname{char} \mathbb{Q} = \operatorname{char} \mathbb{R} = \operatorname{char} \mathbb{C} = \infty$.

1.2.2. Veta. *Nech K je pole. Potom $\operatorname{char} K$ je ∞ alebo prvočíslo.*

Dôkaz. Keďže $0 \neq 1$, zrejme $\operatorname{char} K > 1$. Predpokladajme, že $\operatorname{char} K = n$ je zložené číslo. Potom existujú celé čísla $k, l > 1$ také, že $n = kl$. Keďže $k, l < n$, je $k1 \neq 0 \neq l1$. Na druhej strane $(k1)(l1) = (kl)(1 \cdot 1) = n1 = 0$. Podľa 1.2.1(d) z toho vyplýva $k1 = 0$ alebo $l1 = 0$, čo je spor.

1.3. Polia $\mathbb{Z}_p$

V tomto krátkom paragrafe si ukážeme príklady polí, ktorých charakteristika nie je ∞. Z toho dôvodu sa tieto polia výrazne odlišujú od našich dôverne známych číselných polí. Presnejšie, pre každé prvočíslo p zostrojíme isté konečné pole $\mathbb{Z}_p$, ktoré má p prvkov a charakteristiku p. Na druhej strane, spomínané číselné polia (ako vôbec všetky polia nekonečnej charakteristiky) sú nekonečné. Poznamenajme, že pre každé prvočíslo p a kladné celé číslo k existuje p^k-prvkové pole s charakteristikou p ako aj nekonečné polia charakteristiky p. Ich konštrukcia však presahuje rámec nášho úvodného kurzu.

Pre potreby matematickej analýzy, teda aj z hľadiska fyzikálnych aplikácií, sú najdôležitejšími poľami $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Konečné polia však v súčasnosti zohrávajú dôležitú úlohu napr. v kódovaní a kryptografii.

Pre každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N};\ k < n\} = \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Množinu $\mathbb{Z}_n$ zo zrejmých dôvodov nazývame *množinou zvyškových tried modulo n*. Na tejto množine teraz zavedieme dve binárne operácie – sčítanie $\oplus$ a násobenie $\odot$ (toto trochu ťažkopádne označenie budeme používať len v tomto paragrafe, neskôr sa vrátime k obvyklým $+$ a $\cdot$; v definícii však treba odlíšiť sčítanie a násobenie v $\mathbb{Z}_n$ od príslušných operácií v $\mathbb{Z}$). Pre $a, b \in \mathbb{Z}_n$ kladieme

$$a \oplus b = \text{zvyšok po delení } (a + b) : n,$$
$$a \odot b = \text{zvyšok po delení } (ab) : n.$$

Čitateľovi prenechávame na overenie (prípadne na uverenie), že $\oplus$ a $\odot$ sú asociatívne a komutatívne operácie na $\mathbb{Z}_n$, 0 je neutrálny prvok sčítania a, pre $n > 1$, 1 je neutrálny prvok násobenia. Navyše násobenie je distributívne vzhľadom na sčítanie a $\ominus a = n - a$ je opačný prvok k $a \in \mathbb{Z}_n$.

1.3.1. Veta. *Množina $\mathbb{Z}_n$ s operáciami $\oplus$ a $\odot$ je pole práve vtedy, keď n je prvočíslo.*

Dôkaz. Zrejme n je najmenšie kladné celé číslo také, že

$$n1 = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{n\text{-krát}} = 0.$$

Preto, ak $\mathbb{Z}_n$ je pole, tak $\operatorname{char} \mathbb{Z}_n = n$, a podľa 1.2.2 je n prvočíslo.

Dokážeme, že $\mathbb{Z}_p$ je pole pre každé prvočíslo p. Najprv overíme, že v $\mathbb{Z}_p$ platí zákon o krátení

$$(a \odot b = a \odot c \mathbin{\&} a \neq 0) \Rightarrow b = c.$$

Rovnosť $a \odot b = a \odot c$ znamená, že číslo $ab - ac = a(b - c)$ je deliteľné číslom p. Keďže p je prvočíslo, musí byť aspoň jedno z čísel a, $b - c$ deliteľné číslom p. Nakoľko $0 < a < p$, môže to byť len $b - c$. Pre $b, c \in \mathbb{Z}_p$ to však znamená $b = c$.

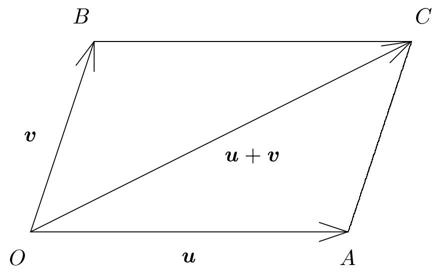
Zostáva overiť existenciu inverzného prvku ku každému $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$. Uvažujme postupnosť mocnín $a^1 = a$, $a^2 = a \odot a$, $a^3 = a \odot a \odot a$, ..., atď. Keďže $a \neq 0$, z dokázaného krátenia vyplýva, že všetky jej členy sú nenulové. Pretože množina $\mathbb{Z}_p$ je konečná, nemôžu byť všetky členy uvedenej postupnosti rôzne. Musia preto existovať kladné celé čísla k, l také, že $a^k = a^{k+l} = a^k \odot a^l$. Potom platí $a^k \odot a^l = a^k \odot 1$, z čoho krátením dostávame $a^l = 1$. Keďže $a^l = a \odot a^{l-1}$, je $a^{-1} = a^{l-1}$ inverzný prvok k a.

Multiplikatívne tabuľky sčítania a násobenia v poli $\mathbb{Z}_5$ sme si ako príklady binárnych operácií uviedli v paragrafe 0.4.

1.4. Vektory v rovine a trojrozmernom priestore

Vektory v rovine či v priestore si predstavujeme ako orientované úsečky, t. j. úsečky, ktorých jeden krajný bod považujeme za počiatočný a druhý za koncový – ten je označený šípkou. Pritom dve rovnako dlhé, rovnobežné a súhlasne orientované úsečky predstavujú ten istý vektor – hovoríme, že sú umiestneniami toho istého vektora. Ak si teda zvolíme nejaký pevný bod O, tak všetky vektory v rovine či priestore môžeme jednoznačne reprezentovať ako orientované úsečky $\overrightarrow{OA}$ s počiatkom v O, pričom ich koncom môže byť ľubovoľný bod A roviny či priestoru, bod O nevynímajúc – orientovaná úsečka $\overrightarrow{OO}$ totiž predstavuje tzv. nulový vektor.

Vektory v rovine i v priestore možno sčítať pomocou tzv. *vektorového rovnobežníka*. Súčet vektorov $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázornený orientovanou uhlopriečkou $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnobežníka, ktorého dve priľahlé strany tvoria úsečky OA, OB.



Vektory možno taktiež násobiť ľubovoľnými skalármi, t. j. reálnymi číslami: ak $c \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor, tak $c\boldsymbol{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počiatkom v O, ktorej dĺžka je $|c|$-násobkom dĺžky úsečky $\boldsymbol{v}$, leží na tej istej priamke ako $\boldsymbol{v}$ a je orientovaná súhlasne s $\boldsymbol{v}$, ak $c > 0$, resp. nesúhlasne s $\boldsymbol{v}$, ak $c < 0$, (ak $c = 0$ alebo $\boldsymbol{v}$ je nulový vektor, tak, samozrejme, aj $c\boldsymbol{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho smere ani orientácii).

Ak si okrem počiatku O zvolíme v rovine či priestore ešte dve resp. tri súradné osi, t. j. navzájom kolmé priamky prechádzajúce počiatkom, a na každej z nich jeden bod v rovnakej jednotkovej vzdialenosti od počiatku, dostaneme pravouhlý súradnicový systém v rovine či v priestore. Každý bod roviny či priestoru je potom jednoznačne určený usporiadanou dvojicou, resp. trojicou svojich súradníc a tiež naopak, každá dvojica resp. trojica súradníc jednoznačne určuje nejaký bod roviny či priestoru. Taktiež každý vektor v rovine či v priestore je potom jednoznačne určený súradnicami svojho koncového bodu a tiež naopak ľubovoľná usporiadaná dvojica resp. trojica súradníc jednoznačne určuje nejaký vektor v rovine či priestore. Pri pevnom súradnicovom systéme tak možno množinu všetkých vektorov v rovine stotožniť s množinou $\mathbb{R}^2$ a množinu všetkých vektorov v priestore s množinou $\mathbb{R}^3$.

Ak (pri takomto stotožnení) $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ sú dva vektory v rovine, tak ľahko nahliadneme, že pre ich súčet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, daný vektorovým rovnobežníkom, platí

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Ak $c \in \mathbb{R}$, tak pre skalárny násobok $c\boldsymbol{u}$ dostávame

$$c\boldsymbol{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobne pre vektory v priestore, t. j. usporiadané trojice reálnych čísel.

Ešte si všimnime, že predpoklady kolmosti súradných osí a rovnosti jednotkových dĺžok v jednotlivých smeroch nehrali v našich úvahách nijakú úlohu. Stačí, aby systém súradných osí tvorili dve rôznobežné priamky (v rovine) resp. tri nekomplanárne priamky (v priestore) pretínajúce sa v počiatku O. Za jednotkové dĺžky v smeroch jednotlivých súradných osí možno zvoliť dĺžky ľubovoľných (nie nevyhnutne rovnako dlhých) úsečiek.

Operácie súčtu vektorov a násobenia vektora skalárom majú rad vlastností, ktoré nie sú viazané len na ich špecifickú geometrickú reprezentáciu v rovine či priestore. Napríklad, prostredníctvom súradnicovej reprezentácie vektorov by sme ich mohli priamočiaro zovšeobecniť na usporiadané n-tice skalárov z ľubovoľného poľa K pre akékoľvek $n \in \mathbb{N}$. Tým by sme dostali akési „n-rozmerné vektorové priestory nad poľom K“. V duchu algebry teraz zadefinujeme abstraktný pojem vektorového priestoru nad daným poľom, pričom budeme abstrahovať od akýchkoľvek súradníc aj „dimenzie“. Podstatné budú pre nás len algebraické vlastnosti operácií súčtu vektorov a skalárneho násobku vektora. K spomínaným príkladom sa však budeme sústavne vracať.

1.5. Vektorové priestory

Nech K je pole. *Vektorovým* alebo tiež *lineárnym priestorom* nad poľom K nazývame množinu V s význačným prvkom $\mathbf{0}$ a dvomi binárnymi operáciami – *sčítaním* $+\colon V\times V\to V$ a *násobením* $\cdot\colon K\times V\to V$ – takými, že platí

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V)(\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}),\\
&(\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}),\\
&(\forall\, \boldsymbol{x}\in V)(\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}),\\
&(\forall\, \boldsymbol{x}\in V)(\exists\, \boldsymbol{y}\in V)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}),\\
&(\forall\, a,b\in K)(\forall\, \boldsymbol{x}\in V)(a\cdot(b\cdot\boldsymbol{x})=(ab)\cdot\boldsymbol{x}),\\
&(\forall\, \boldsymbol{x}\in V)(1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}),\\
&(\forall\, a\in K)(\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)(a\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(a\cdot\boldsymbol{x})+(a\cdot\boldsymbol{y})),\\
&(\forall\, a,b\in K)(\forall\, \boldsymbol{x}\in V)((a+b)\cdot\boldsymbol{x}=(a\cdot\boldsymbol{x})+(b\cdot\boldsymbol{x})).
\end{aligned}
$$

Ako si čitateľ asi všimol, skaláry značíme „obyčajnými“ malými latinskými písmenami a vektory tučnými malými latinskými písmenami. Tejto implicitnej dohody sa budeme väčšinou držať, nie však za každú cenu. Kedykoľvek by nás obmedzovala, nebudeme váhať ju porušiť.

I keď sčítanie skalárov v poli a sčítanie vektorov značíme rovnakým znakom $+$, ide o rôzne operácie. Podobne násobenie v poli a násobenie vektora skalárom sú rôzne operácie, hoci obe značíme $\cdot$. Neskôr tento prístup dovedieme ešte ďalej, keď budeme rovnako značiť príslušné operácie a nuly v rôznych vektorových priestoroch. Rozlišovanie znakov pre nulu $0\in K$ a $\mathbf{0}\in V$, hoci tieto prvky plnia rovnakú funkciu v K resp. vo V, je tak trochu proti duchu tohto prístupu. Ide vlastne o zbytočný luxus, ktorý je však v zhode s prijatou dohodou o značení skalárov a vektorov.

Z formálneho hľadiska pripomínajú axiómy vektorového priestoru axiómy poľa: sčítanie vektorov je opäť asociatívna a komutatívna binárna operácia na V s neutrálnym prvkom $\mathbf{0}\in V$, operácia násobenia vektora skalárom tiež spĺňa akúsi podmienku „asociatívnosti“, $1\in K$ je jej „neutrálnym prvkom“ a platia dva „distributívne zákony“. Je tu však jeden podstatný rozdiel – kým násobenie v poli K je binárnou operáciou na množine K, t. j. zobrazením $\cdot\colon K\times K\to K$, násobenie vo vektorovom priestore V nad poľom K nie je binárnou operáciou na V, ale binárnou operáciou $\cdot\colon K\times V\to V$. To nám však nebráni zaviesť obdobné dohody ako pre operácie v poli: i teraz bude mať násobenie prednosť pre sčítaním a znak násobenia budeme väčšinou vynechávať, t. j. písať napr. $a\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ miesto $(a\cdot\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}$. Takisto budeme vynechávať zátvorky, ktorých umiestnenie neovplyvní výslednú hodnotu výrazov ako napr. v $ab\boldsymbol{x}$ alebo $a_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+a_n\boldsymbol{x}_n$. Posledný výraz budeme tiež značiť

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{x}_i$$

a nazývať *lineárnou kombináciou* vektorov $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ s koeficientami $a_1,\ldots,a_n$. Špeciálne pre $n=1$ to znamená $\sum_{i=1}^{1}a_i\boldsymbol{x}_i=a_1\boldsymbol{x}_1$; kvôli úplnosti pre $n=0$ ešte kladieme prázdnu lineárnu kombináciu $\sum_{i=1}^{0}a_i\boldsymbol{x}_i$ rovnú $\mathbf{0}$.

Podobne ako v prípade polí, možno z axióm vektorových priestorov odvodiť niektoré základne pravidlá pre počítanie so skalármi a vektormi. Predovšetkým prvok $\boldsymbol{y}\in V$ taký, že $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, je k danému $\boldsymbol{x}\in V$ určený jednoznačne – značíme ho $-\boldsymbol{x}$ a nazývame *opačný vektor* k $\boldsymbol{x}$. Namiesto $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$ opäť píšeme len $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$. Tieto pravidlá zhrnieme v nasledujúcej analógii tvrdenia 1.3.1.

1.5.1. Tvrdenie. *Nech V je vektorový priestor nad poľom K. Potom pre ľubovoľné $n\in\mathbb{N}$, $a,b,a_1,\ldots,a_n\in K$ a $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in V$ platí*

(a) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}$,
(b) $(a\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{y}\ \&\ a\neq 0)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, $\quad(a\boldsymbol{x}=b\boldsymbol{x}\ \&\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})\ \Rightarrow\ a=b$,
(c) $a\mathbf{0}=\mathbf{0}=0\boldsymbol{x}$,
(d) $a\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ (a=0\ \vee\ \boldsymbol{x}=\mathbf{0})$,
(e) $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$,
(f) $a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}-a\boldsymbol{y}$, $\quad(a-b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}-b\boldsymbol{x}$,
(g) $a(\boldsymbol{x}_1+\ldots+\boldsymbol{x}_n)=a\boldsymbol{x}_1+\ldots+a\boldsymbol{x}_n$, $\quad(a_1+\ldots+a_n)\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{x}+\ldots+a_n\boldsymbol{x}$.

Dôkaz. Všetky podmienky, s výnimkou druhej implikácie v (b), možno dokázať celkom analogicky ako príslušné časti tvrdenia 1.3.1. Dokážeme aj túto. Nech $a\boldsymbol{x}=b\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. Potom $(a-b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}-b\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Podľa (d) z toho vyplýva $a-b=0$, teda $a=b$.

Práve definované vektorové priestory by sme presnejšie mohli nazvať „ľavými“ vektorovými priestormi, lebo v operácii skalárneho násobku píšeme skalár vľavo od vektora. Celkom obdobne by sme mohli definovať aj „pravé“ vektorové priestory, v ktorých by sme operáciu skalárneho násobku chápali ako zobrazenie $V\times K\to V$ a zapisovali ju v tvare $\boldsymbol{x}\cdot a$ alebo len $\boldsymbol{x}a$ pre $\boldsymbol{x}\in V$, $a\in K$. Vďaka komutatívnosti násobenia v poli K si však môžeme dovoliť chápať naše „ľavé“ vektorové priestory zároveň ako „pravé“. Pre všetky $a\in K$, $\boldsymbol{x}\in V$ jednoducho položíme $\boldsymbol{x}a=a\boldsymbol{x}$. Jediný problém – zabezpečiť pre všetky $a,b\in K$, $\boldsymbol{x}\in V$ rovnosť $(ab)\boldsymbol{x}=(ba)\boldsymbol{x}$, ktorá z takejto definície vyplýva výpočtom

$$(ab)\boldsymbol{x}=a(b\boldsymbol{x})=a(\boldsymbol{x}b)=(\boldsymbol{x}b)a=\boldsymbol{x}(ba)=(ba)\boldsymbol{x},$$

– je vyriešený práve v dôsledku komutatívnosti násobenia v K. Teda, ak sa nám v operácii skalárneho násobku vyskytne skalár vpravo od vektora, nemusí nás to vyviesť z miery – kľudne ho môžeme prehodiť vľavo a ani o zátvorky sa nemusíme príliš starať.

1.6. Príklady vektorových priestorov

1.6.1. Rozšírenia polí. Zrejme každé pole možno K považovať za vektorový priestor nad sebou samým. Všeobecnejšie, ak pole L je rozšírením poľa K, tak L možno považovať za vektorový priestor nad poľom K (formálne stačí „zabudnúť“ násobenie niektorých dvojíc prvkov $a,b\in L$ a súčin ab pripustiť len pre $a\in K$, $b\in L$). Podobným spôsobom možno vektorový priestor V nad poľom L zúžením násobenia $L\times V\to V$ na násobenie $K\times V\to V$ prerobiť na vektorový priestor nad poľom K.

1.6.2. *n*-rozmerné riadkové a stĺpcové vektory nad daným poľom. Pre ľubovoľné pole K a $n\in\mathbb{N}$ množina

$$K^n=\{(x_1,\ldots,x_n);\ x_1,\ldots,x_n\in K\}$$

všetkých usporiadaných n-tíc prvkov z K spolu s operáciami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),\\ c\boldsymbol{x} &= c(x_1,\dots,x_n) = (cx_1,\dots,cx_n), \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)\in K^n$ a $c\in K$, tvorí vektorový priestor nad poľom K. Zrejme usporiadaná n-tica $\mathbf{0}_n=(0,\dots,0)$ hrá úlohu nuly v K^n. Ak bude potrebné rozlíšiť nulové vektory v priestoroch K^n pre rôzne prirodzené čísla n, budeme pre nulu v K^n používať označenie $\mathbf{0}_n$. Opačný prvok k $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ je zrejme

$$-\boldsymbol{x} = -(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n)$$

Hovoríme, že operácie na K^n sú definované *po zložkách.* Prvky tohto vektorového priestoru nazývame *n-rozmerné riadkové vektory* nad poľom K. Kvôli úplnosti ešte poznamenajme, že vektorový priestor K^0 pozostáva z jediného prvku $\emptyset$, predstavujúceho „usporiadanú nulaticu“, ktorá tak je nevyhnutne nulou v K^0.

Niekedy je (a väčšinou i bude) výhodnejšie pracovať s *n-rozmernými stĺpcovými vektormi* nad poľom K, t. j. s vektormi tvaru

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},$$

kde $x_1,\dots,x_n\in K$. Čitateľ si iste sám doplní definície príslušných operácií (opäť po zložkách) a ďalšie podrobnosti. Pokiaľ nebude hroziť nedorozumenie, budeme i tento priestor označovať K^n, prípadne len slovne naznačíme, či tým máme na mysli priestor n-rozmerných riadkových alebo stĺpcových vektorov. V súlade s tým $\mathbf{0}_n$ alebo len $\mathbf{0}$ môže označovať aj nulový vektor-stĺpec.

1.6.3. Polynómy nad daným poľom. Pod *polynómom* alebo tiež *mnohočlenom f stupňa n*, kde $-1\le n\in\mathbb{Z}$, v premennej x nad poľom K rozumieme formálny výraz tvaru

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

kde $a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a_n\in$ sú skaláry, nazývané *koeficienty* polynómu f, a $a_n\neq 0$; nulu $0\in K$ považujeme za polynóm stupňa -1 a nenulové skaláry $a\in K$ za polynómy stupňa 0. Zrejme každý polynóm f definuje (rovnako označovanú) funkciu $f\colon K\to K$ danú predpisom $c\mapsto f(c)$, t. j. dosadením konkrétnych hodnôt $c\in K$ za premennú x do polynómu f. Množinu všetkých polynómov v premennej x nad K *stupňa nanajvýš* n, kde $-1\le n\in\mathbb{Z}$, budeme značiť $K^{(n)}[x]$; množinu *všetkých polynómov* v premennej x nad K značíme $K[x]$. Ľubovoľný polynóm $g(x)=\sum_{i=0}^m b_ix^i\in K[x]$ stupňa $m<n$ môžeme tiež písať v tvare

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m + 0x^{m+1} + \ldots + 0x^n,$$

t. j. v tvare $g(x)=\sum_{i=0}^n b_ix^i$, kde $b_i=0$ pre $m<i\le n$. S použitím tejto konvencie možno definovať súčet $f+g$ polynómov $f=\sum_{i=0}^n a_ix^i$, $g=\sum_{i=0}^m b_ix^i$ z $K[x]$ predpisom

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i+b_i)x^i.$$

Ak navyše $c\in K$, kladieme

$$(cf)(x) = cf(x)\sum_{i=0}^{n} ca_ix^i.$$

Ľahko možno nahliadnuť, že s takto po zložkách definovanými operáciami súčtu a skalárneho násobku tvorí každá z množín polynómov $K^{(n)}[x]$, kde $-1\le n\in\mathbb{Z}$, ako i množina všetkých polynómov $K[x]$ vektorový priestor nad poľom K. Štruktúrou vektorového priestoru sa však algebra polynómov nevyčerpáva. Popri súčte a skalárnom násobku možno na $K[x]$ definovať aj súčin fg uvedených polynómov f, g predpisom

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kx^k,$$

kde $c_k=\sum_{i=0}^m a_ib_{k-i}$.

1.6.4. Priame súčiny vektorových priestorov. Nech V_1 a V_2 sú vektorové priestory nad tým istým poľom K. *Priamym súčinom* (niekedy tiež *vonkajším priamym súčtom*) priestorov V_1, V_2 nazývame množinu $V_1\times V_2$, t. j. karteziánsky súčin množín V_1, V_2, s operáciami súčtu vektorov a skalárneho násobku definovanými po zložkách. Teda pre $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)\in V_1\times V_2$, $c\in K$ kladieme

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)+(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2),\\ c(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2) &= (c\boldsymbol{u}_1,c\boldsymbol{u}_2). \end{aligned}$$

Zrejme $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ je nulou tohto vektorového priestoru a $-(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=(-\boldsymbol{u}_1,-\boldsymbol{u}_2)$ je opačný prvok k $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$. Čitateľovi prenechávame, aby si overil, že priamy súčin $V_1\times V_2$ s takto definovanými operáciami naozaj tvorí vektorový priestor nad poľom K, a taktiež, aby si premyslel, ako možno uvedenú konštrukciu zovšeobecniť na priamy súčin $V_1\times\ldots\times V_n$ ľubovoľného konečného počtu vektorových priestorov $V_1,\dots,V_n$ nad K. Ak $V=V_1=\ldots=V_n$, tak píšeme $V_1\times\ldots\times V_n=V^n$ a tento vektorový priestor nazývame n-tou *priamou mocninou* priestoru V. Pre $V=K$ uvedená konštrukcia zrejme dáva nám už známy vektorový priestor K^n z 1.5.2.

1.6.5. Vektorové priestory funkcií. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a X je ľubovoľná množina. Pripomeňme, že V^X označuje množinu všetkých funkcií $f\colon X\to V$. Teraz ukážeme, ako možno z tejto množiny urobiť vektorový priestor nad poľom K. Operácie súčtu a skalárneho násobku budeme definovať opäť po zložkách. To znamená, že pre $f,g\in V^X$ a $c\in K$ budeme definovať funkcie $f+g\in V^X$ a $cf\in V^X$ tak, že pre každé $x\in X$ položíme

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (cf)(x) &= cf(x). \end{aligned}$$

Znovu možno ľahko nahliadnuť, že V^X s takto definovanými operáciami tvorí vektorový priestor nad poľom K – nazývame ho *vektorovým priestorom všetkých funkcií* z X do V. Nulou vo V^X je funkcia $\mathbf{0}\colon X \to V$ identicky rovná prvku $\mathbf{0} \in V$; opačným prvkom k funkcii $f \in V^X$ je funkcia $-f \in V^X$ daná predpisom $x \mapsto -f(x)$ pre $x \in X$.

V špeciálnom prípade pre $V = K$ takto dostaneme vektorový priestor K^X všetkých funkcií z množiny X do poľa K. Ak K je pole všetkých reálnych prípadne komplexných čísel a X je napr. nejaký uzavretý interval $\langle a, b\rangle$ reálnych čísel, tak dostávame vektorové priestory funkcií $\mathbb{R}^{\langle a,b\rangle}$ resp. $\mathbb{C}^{\langle a,b\rangle}$, ktoré sa hojne vyskytujú v matematickej analýze.