Hilbertovy prostory a úplné polosvazy s dualitou – dilatační teorémy

JAN PASEKA

kolokviální přednáška

sekce matematika PřF MU
Janáčkovo nám. 2a
66295 Brno, Česká republika
e-mail: paseka@math.muni.cz

1 Úvod a motivace, základní pojmy

V této přenášce bych rád ukázal jisté souvislosti *teorie Hilbertových prostorů* s oblastí, kterou se již delší dobou zabývám, a to teorií uspořádaných množin, zejména úplných polosvazů.

Takřka nikdo, kromě topologů, se nezabývá problémy Hilbertových prostorů samotných, to, co je dělá zajímavé, je studium operátorů na Hilbertových prostorech. V dalším se budeme věnovat jistým vlastnostem operátorů na Hilbertových prostorech a následnému přenesení známých výsledků do kontextu operátorů na úplných svazech s dualitou.

1.1 Hilbertovy prostory - základní pojmy

Hermitovskou formou na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{C}$ budeme rozumět zobrazení $\langle -, - \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{C}$, antilineární v první komponentě a lineární v druhé komponentě, takové, že $\langle u, v \rangle^* = \langle v, u \rangle$. Hermitovská forma se nazývá *definitní*, jestliže $\langle u, u \rangle = 0$ nám dává $u = 0$. *Skalárním součinem* pak rozumíme pozitivně definitní hermitovskou formu. Mluvíme pak o *vektorovém prostoru se skalárním součinem.* Poznamenejme, že každý skalární součin má následující vlastnost, která je hojně využívána (*axiom jednoznačnosti*):

$$\langle -, u\rangle = \langle -, v\rangle \quad \text{implikuje} \quad u = v.$$

Totiž, $\langle -, u\rangle = \langle -, v\rangle$ implikuje $\langle -, u - v\rangle = 0$ tj. speciálně $\langle u - v, u - v\rangle = 0$ tj. $u - v = 0$ tj. $u = v$.

Hilbertův prostor je vektorový prostor se skalárním součinem, který je úplný vzhledem k metrice indukované normou $d(u, v) = ||u - v|| = \langle u - v, u - v\rangle$. Reálný Hilbertův prostor se definuje analogicky. Máme-li vektorový prostor $\mathbf{V}$ se skalárním součinem, můžeme ho kanonickým způsobem zúplnit.

Skalární součin pak hraje úlohu „podobnosti“ mezi dvěma stavy-vektory zejména proto, abychom mohli formulovat „aproximační“ tvrzení. Úplnost Hilbertova prostoru je důležitá pro konstruování aproximujících posloupností.

Příklad Hilbertova prostoru: 1. $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$), $\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum \overline{x_i} y_i$ ($\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum x_i y_i$).
2. Prostor posloupností $l^2(I)$, $|I| \leq |\mathbb{N}|$, $l^2 = l^2(I) = \{(x_i)_{i\in I} : \sum_{i\in I} \overline{x_i} x_i < \infty\}$ se skalárním součinem $\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum \overline{x_i} y_i$.
3. Prostor (tříd) funkcí s integrovatelným čtvercem $L^2([0, 1])$, se skalárním součinem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \int_0^1 \overline{\mathbf{x}(\mathbf{t})}\mathbf{y}(\mathbf{t}) dt$.

Poznámka 1.1 David Hilbert v r. 1904, v návaznosti na práce D. Bernoulliho, H. Schwarze, E. Fredholma aj., v teorii integrálních rovnic tvaru

$$x(s) - \int_0^1 K(s, t)x(t)dt = f(s)$$

pro známě jádro $K(s, t)$ a známou funkci $f(s)$ zavedl pojem prostoru posloupností l^2 jakožto nekonečněrozměrného zobecnění Euklidova prostoru a spolu se svým žákem E. Schmidtem vyvinuli teorii tohoto prostor. Von Neumann (1932) v rámci budování základů kvantové mechaniky abstrahoval od speciální struktury tohoto prostoru a definoval *Hilbertův prostor* obecně. Zároveň ukázal, že pomocí teorie Hilbertových prostorů lze popsat teorii pravděpodobnosti, kterou axiomatizoval A.N. Kolmogorov v roce 1933. Dále položil základy svazovému přístupu ke kvantové mechanice.

Věta 1.2 *Každé dva (separabilní) Hilbertovy prostory jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi tj. jsou izomorfní s $l^2(I)$ pro vhodné I. Je-li I konečné, $|I| = n$, jsou izomorfní s $\mathbb{C}^n$.*

Pojem vektorového prostoru je založen čistě na algebraické struktuře; proto, když budeme navíc uvažovat topologickou strukturu, budeme navíc pracovat se spojitými lineárními zobrazeními.

Věta 1.3 *Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro lineární operátor T mezi Hilbertovými prostory:*

1. *T je spojitý,*
2. $||T|| = \sup_{x\neq 0}\frac{||T(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1}||T(x)|| < \infty$ *tj. T je ohraničený.*

Budeme pak značit $B(H_1, H_2)$ (normovaný) vektorový prostor všech ohraničených operátorů z H_1 do H_2 resp. $B(H) = B(H, H)$, zde H, H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Přitom, pro každý prvek $T \in B(H_1, H_2)$, existuje právě jeden prvek $T^* \in B(H_2, H_1)$ tak, že $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ - mluvíme o operátoru *adjungovaném* k operátoru T. Platí-li $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$, mluvíme o izometrii. Evidentně, každá izometrie je prosté zobrazení.

Speciálně, na $B(H)$ máme operaci $^* : B(H) \to B(H)$ tak, že $T^{**} = T$ a $(S\circ T)^* = T^*\circ S^*$. Pokud $T \in B(H)$ a $T = T^*$, řekneme, že T je hermitovský operátor, pokud navíc $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ pro všechna $x \in H$, řekneme, že T je pozitivní operátor.

Pokud $T \circ T^* = T^* \circ T = \mathrm{id}_H$, řekneme, že T je unitární. Evidentně, $||T|| = 1$.

1.2 Úplné polosvazy s dualitou - základní pojmy

Úplným polosvazem budeme rozumět uspořádanou množinu S tak, že pro každou její podmnožinu T bude existovat její supremum $\bigvee T$. Homomorfismem mezi úplnými polosvazy bude zobrazení zachovávající suprema, zejména bude tedy zachováván nejmenší prvek 0. *Úplný polosvaz s dualitou* S je úplný polosvaz opatřený unární operací $' : S \to S$ tak, že

$$\begin{aligned} s'' &= s \\ (\textstyle\bigvee_{i\in I} s_i)' &= \textstyle\bigwedge_{i\in I} s_i' \end{aligned}$$

pro všechna $s, s_i \in S$, $i \in I$. Platí-li navíc $s \vee s' = 1$ pro všechna $s \in S$, mluvíme o ortokomplementárním svazu.

Hermitovskou formou na úplném polosvazu S budeme rozumět zobrazení $\langle -, -\rangle : S \times S \to \mathbf{2}$ takové, že zachovává suprema v obou komponentách a $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$. Hermitovská forma se nazývá *definitní*, jestliže $\langle u,u\rangle = 0$ nám dává $u = 0$. *Skalárním součinem* pak rozumíme definitní hermitovskou formu splňující axiom jednoznačnosti

$$\langle -, u\rangle = \langle -, v\rangle \quad \text{implikuje} \quad u = v.$$

Mluvíme pak o *úplném polosvazu se skalárním součinem.*

Lemma 1.4 *Buď S úplný polosvaz. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *S je úplný polosvaz s dualitou $'$ (ortokomplementární úplný polosvaz).*
2. *S je úplný polosvaz opatřený hermitovskou formou splňující axiom jednoznačnosti (se skalárním součinem).*

Důkaz. Platí $\langle u,v\rangle = 0$ právě tehdy, když $u \leq v'$ a $v' = \bigvee\{u \in S : \langle u,v\rangle = 0\}$.

Nechť $\langle s,s\rangle = 0$. Pak $s \leq s'$ tj. $s = s \wedge s \leq s' \wedge s = 0$ i.e. $s = 0$. Obráceně, máme $\langle s\wedge s', s\wedge s'\rangle \leq \langle s,s'\rangle = 0$ i.e. $s \wedge s' = 0$. $\square$

Ortokomplementární úplný polosvaz se se nazývá *ortomodulární*, jestliže plaí

$$\langle s,t\rangle = 0 \text{ a } s \vee t = 1 \text{ implikuje } s = t'.$$

Analogicky, budeme značit $\mathcal{Q}(S_1,S_2)$ úplný polosvaz všech operátorů (homomorfismů úplných polosvazů) z S_1 do S_2 resp. $\mathcal{Q}(S) = \mathcal{Q}(S,S)$, zde S, S_1, S_2 jsou úplné polosvazy s dualitou. Přitom, pro každý prvek $T \in \mathcal{Q}(S_1,S_2)$, existuje právě jeden prvek $T^* \in \mathcal{Q}(S_2,S_1)$ tak, že $\langle T(x),y\rangle = \langle x,T^*(y)\rangle$. Speciálně, na $\mathcal{Q}(S)$ máme operaci $^* : \mathcal{Q}(S) \to \mathcal{Q}(S)$ tak, že $T^{**} = T$ a $(S\circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Pokud $T \in \mathcal{Q}(S)$ a $T = T^*$, řekneme, že T je hermitovský operátor.

1.3 Hilbertovy prostory a úplné polosvazy s dualitou - Pironova věta

Věta 1.5 [(1964) Piron, (1967) Amemiya, Araki] *Buď V vektorový prostor se skalárním součinem. Pak systém všech podmnožin $\mathcal{P}(V)$ spolu s hermitovskou formou $\langle -,-\rangle : \mathcal{P}(V)\times\mathcal{P}(V) \to \mathbf{2}$ definovanou předpisem $\langle S,T\rangle = 0$ právě když $\langle s,t\rangle = 0$ pro všechna $s \in S, t \in T$ nám indukuje úplný ortokomplementární polosvaz $L(V)$ s ortokomplementem $S' = \bigvee\{T \subseteq V : \langle S,T\rangle = 0\}$,*

$L(V) = \{T \subseteq V : T = T''\}$. Navíc, $L(V)$ je ortomodulární právě tehdy, když je V Hilbertův prostor.

Poznamenejme, že navíc platí, že jistá třída ortomodulárních úplných polosvazů je reprezentovatelná jako $L(V)$, kde V je vektorový prostor s definitní hermitovskou formou, která nabývá svých hodnot v tělese opatřeném involutivním automorfismem. O této třídě ortomodulárních úplných polosvazů Piron ukázal, že je vhodná pro formulaci postulátů kvantové mechaniky (viz Birkhoff, von Neumann).

2 Hermitovské funkce

2.1 Hermitovské funkce pro Hilbertovy prostory

Buď X množina. Funkce $\Phi : X \times X \to \mathbb{C}$ se nazývá hermitovská, pokud $\Phi(u,v)^* = \Phi(v,u)$. Hermitovská funkce se nazývá *definitní*, jestliže $\Phi(u,u) = 0$ nám dává $u = 0$. *Hermitovským jádrem* pak rozumíme hermitovskou funkci Φ tak, že, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je matice

$$(\Phi(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n},$$

$x_i \in X, 1 \leq i \leq n$, pozitivně definitní.

Je-li navíc množina X opatřena asociativní binární operací $\cdot$ a unární operací * tak, že $a^{**} = a$ a $a^* \cdot b^* = (b \cdot a)^*$, mluvíme o involutivní pologrupě. Příkladem involutivní pologrupy je 1. $\mathbb{C}$, kde $^* = ^-$, 2.$\mathbb{C}, R$, kde $^* = \mathrm{id}$ a 3. $B(H)$.

Zejména můžeme přiřadit k funkci $\phi : X \to \mathbb{C}$ funkci $\Phi_\phi : X \times X \to \mathbb{C}$ předpisem $(x,y) \mapsto \phi(x^* \cdot y)$. Je-li Φ_ϕ pozitivně definitní, říkáme, že funkce ϕ je *pozitivně definitní.*

Poznámka 2.1 Poznamenejme, že přirozeným způsobem můžeme rozšířit výše zavedené pojmy na zobrazení $\Phi : X \times X \to B(H)$, kde H je Hilbertův prostor. Protože $B(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, pokrývá toto rozšíření i standardní definici.

Volný (komplexní) vektorový prostor nad množinou X existuje a je to podprostor prostoru $\mathbb{C}^X$ generovaný množinou $\{\mathbf{e}_x\}_{x \in X}$, kde $\pi_y \mathbf{e}_x = \delta_{xy}$, δ_{xy} je Kroneckerovo delta. Budeme jej značit $F(X)$. Formálně jej můžeme ztotožnit s vektorovým prostorem konečných lineárních kombinací tvaru $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, kde $x_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Ekvivalentní zápis je tvaru

$$\sum_{x \in X} x f(x),$$

kde $f : X \to \mathbb{C}$ je funkce s konečným nosičem.

Věta 2.2 *Buď nyní $\Phi : X \times X \to \mathbb{C}$ hermitovské jádro. Pak $F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X})$ je volný vektorový prostor se skalárním součinem $\langle -, - \rangle : F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X}) \times F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X}) \to \mathbb{C}$ tak, že*

$$\langle \Phi(-,x), \Phi(-,y) \rangle = \Phi(x,y)$$

a pro každý vektorový prostor $\mathbf{W}$ se skalárním součinem $\langle -, - \rangle_{\mathbf{W}}$ a zobrazení $f : X \to \mathbf{W}$ splňující

$$\langle f(x), f(y) \rangle_{\mathbf{W}} = \Phi(x,y)$$

existuje lineární zobrazení $g : F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X}) \to W$ tak, že $g(\Phi(-,x)) = f(x)$.

Důkaz. Uvažme volný vektorový prostor $F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X})$ nad množinou $\{\Phi(x,-)\}_{x\in X}$. Má-li funkce $f : X \to \mathbb{C}$ konečný nosič, položme $f_\Phi = \sum_{x\in X} \Phi(-,x) f(x)$ tj. každý prvek z $F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X})$ je tohoto tvaru. Přitom f_Φ lze považovat zároveň za zobrazení z X do $\mathbb{C}$ definované předpisem $f_\Phi(y) = \sum_{x\in X} \Phi(y,x) f(x)$. Dále budeme považovat f_Φ za stejné s g_Φ, pokud $f_\Phi(y) = g_\Phi(y)$ pro všechna y.

Opatřme nyní $F(\{\Phi(-,x)\}_{x\in X})$ skalárním součinem. Buď $f, g : X \to \mathbb{C}$ funkce s konečným nosičem. Položme

$$\langle f_\Phi, g_\Phi \rangle = \sum_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x) f(x), g(y) \rangle .$$

Pak toto zobrazení je antilineární v první komponentě a lineární v druhé. Navíc

$$\begin{aligned}
\langle f_\Phi, g_\Phi \rangle^* &= \textstyle\sum_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x) f(x), g(y) \rangle^* \\
&= \textstyle\sum_{x,y\in X} \overline{\overline{\Phi(y,x) f(x)} g(y)} \\
&= \textstyle\sum_{x,y\in X} \Phi(y,x) \overline{g(y)} f(x) \\
&= \textstyle\sum_{x,y\in X} \overline{\Phi(x,y)}\, \overline{g(y)} f(x) \\
&= \textstyle\sum_{x,y\in X} \overline{\Phi(x,y) g(y)} f(x) \\
&= \langle g_\Phi, f_\Phi \rangle .
\end{aligned}$$

Evidentně, platí $\langle f_\Phi, f_\Phi\rangle = \sum_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x)f(x), f(y)\rangle \geq 0$. Pak lze ukázat, že platí i Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|\langle f_\Phi, g_\Phi\rangle| \leq \langle f_\Phi, f_\Phi\rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle g_\Phi, g_\Phi\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Je-li tedy $\langle f_\Phi, f_\Phi\rangle = 0$, je, pro všechna g_Φ, $\langle f_\Phi, g_\Phi\rangle = 0$.

Uvažme zobrazení $\varphi^x : X \to \mathbb{C}$ definované předpisem

$$\varphi^x(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme pak

$$0 = \langle f_\Phi, \varphi^z_\Phi\rangle = \sum_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x)f(x), \varphi^z(y)\rangle = \sum_{x\in X} \Phi(z,x)f(x) = f_\Phi(z).$$

Je tedy $f_\Phi(z) = 0$ pro všechna $z \in X$ tj. $f_\Phi = 0$. Je tedy $\langle -, -\rangle$ pozitivně definitní forma.

Poznamenejme, že $\varphi^y_\Phi = \Phi(-, y)$. Tedy máme

$$\begin{aligned} \langle \Phi(-,x), \Phi(-,y)\rangle &= \langle \varphi^x_\Phi, \varphi^y_\Phi\rangle \\ &= \textstyle\sum_{s,t\in X} \langle \Phi(t,s)\varphi^x(s), \varphi^y(t)\rangle \\ &= \langle \Phi(y,x)\varphi^x(x), \varphi^y(y)\rangle \\ &= \Phi(x,y). \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.3 Poznamenejme, že výše uvedené platí s jemnou modifikací i pro ohodnocení (hermitovské jádro) $\Phi : X \times X \to B(H)$. Pouze zápis $\Phi(y,x)f(x)$ bude představovat aplikaci $\Phi(y,x)(f(x))$ (a tedy můžeme za prvky naší volné konstrukce brát pouze formální součty

$$f_\Phi = \sum_{x\in X} \Phi(-,x)f(x), f : X \to H \text{ s konečným nosičem})$$

a $\varphi^x : X \to \mathbb{C}$ nahradíme zobrazeními zobrazení $\varphi^{x,h} : X \to H$ definovanými předpisem

$$\varphi^{x,h}(y) = \begin{cases} h & x = y \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak je $\Phi(x,y)(h) = \varphi^{y,h}_\Phi(x)$.

Příslušný vektorový prostor se skalárním součinem budeme označovat $\mathbf{V}_\Phi$. Stejně jako výše bude skalární součin tvaru

$$\langle f_\Phi, g_\Phi \rangle_{H_\Phi} = \sum_{x,y \in X} \langle \Phi(y,x) f(x), g(y) \rangle_H .$$

Speciálně

$$\left\langle \varphi^{y,h_1}, \varphi^{x,h_2} \right\rangle_{H_\Phi} = \langle \Phi(y,x)(h_1), h_2 \rangle_H .$$

Definice 2.4 *Buď $\Phi : X \times X \to B(H)$ hermitovské jádro, $V(x) : H \to H'$, $x \in X$, systém lineárních ohraničených zobrazení tj. $V : X \to B(H, H')$. Řekneme, že zobrazení V je* Kolmogorovův rozklad *jádra Φ, jestliže*

$$\Phi(x,y) = (V^*(x) \circ V(y))$$

pro všechna $x, y \in X$. Pokud navíc

$$cl(\mathrm{Lin}(\{V(x)(h) : x \in X, h \in H\})) = H',$$

říkáme, že zobrazení V je minimální Kolmogorovův rozklad *jádra Φ.*

Věta 2.5 *Buď nyní $\Phi : X \times X \to B(H)$ hermitovské jádro. Pak existuje Hilbertův prostor H_Φ se skalárním součinem $\langle -, - \rangle : H_\Phi \times H_\Phi \to \mathbb{C}$ tak, že*

$$\langle f_\Phi, g_\Phi \rangle_{H_\Phi} = \sum_{x,y \in X} \langle \Phi(y,x) f(x), g(y) \rangle_H .$$

Navíc zobrazení $V : X \to B(H, H_\Phi)$ definované předpisem

$$V(x)(h) = \varphi_\Phi^{x,h} = \sum_{z \in X} \Phi(-,z) \varphi^{x,h}(z)$$

tvoří minimální Kolmogorův rozklad pro Φ. Je-li navíc $W : X \to B(H, H_W)$ jiný takový minimální Kolmogorův rozklad pro Φ, existuje jediné unitární izomorfismus $U : H_\Phi \to H_W$ tak, že $U \circ V_x = W(x)$, pro všechna $x \in X$.

Důkaz. Stačí uvážit zúplnění vektorového prostoru $\mathbf{V}_\Phi$. Snadno se ověří, že zobrazení $V(x)$ je ohraničené a má tedy adjungované zobrazení $V(x)^*$ určený předpisem

$$V(x)^*(f_\Phi) = f_\Phi(x).$$

Speciálně pak

$$\begin{aligned}\langle V(x)^* \circ V(y)(h_1), h_2\rangle &= \langle V(y)(h_1), V(x)(h_2)\rangle \\ &= \left\langle \varphi_\Phi^{y,h_1}, \varphi_\Phi^{x,h_2}\right\rangle = \langle \Phi(x,y)(h_1), h_2\rangle\end{aligned}$$

tj. $V(x)^* \circ V(y) = \Phi(x,y)$. Protože $V(x)(h) = \varphi_\Phi^{x,h}$ generuje H_Φ, máme minimální Kolmogorův rozklad. Buď tedy $W : X \to B(H, H_W)$ jiný minimální Kolmogorův rozklad. Budeme definovat $U : H_\Phi \to H_W$ následovně: $U(\sum_{i\in I} V(x_i)(m_i)) = \sum_{i\in I} W(x_i)(m_i)$ pro všechna $x \in X$ a všechna $m \in H$. Ověřme nejprve korektnost U. Nechť $\sum_{i\in I} V(s_i)(m_i) = \sum_{j\in J} V(t_j)(n_j)$, $s_i, t_j \in X$, $m_i, n_j \in H$, $i \in I$, $j \in J$. Pak máme

$$\begin{gathered}\left\langle \sum_{i\in I} W(s_i)(m_i), W(s)(m)\right\rangle_W = \left\langle W(s)^*(\sum_{i\in I} W(s_i)(m_i)), m\right\rangle = \\ \left\langle \sum_{i\in I} W(s)^*(W(s_i)(m_i)), m\right\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} \Phi(s, s_i)(m_i), m\right\rangle = \\ \left\langle \sum_{i\in I} V(s)^*(V(s_i)(m_i)), m\right\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} V(s_i)(m_i), V(s)(m)\right\rangle_V = \\ \left\langle \sum_{j\in J} V(t_j)(n_j), V(s)(m)\right\rangle_V = \left\langle \sum_{j\in J} V(s)^*(V(t_j)(n_j)), m\right\rangle = \\ \left\langle \sum_{j\in J} \Phi(s, t_j)(n_j), m\right\rangle = \left\langle \sum_{j\in J} W(s)^*(W(t_j)(n_j)), m\right\rangle = \\ \left\langle \sum_{j\in J} W(t_j)(n_j), W(s)(m)\right\rangle_W,\end{gathered}$$

pro všechna $s \in X$ a $m \in H$. To nám dává

$$\sum_{i\in I} W(s_i)(m_i) = \sum_{j\in J} W(t_j)(n_j).$$

Analogicky, máme zobrazení $U' : H_W \to H_\Phi$ definované následovně: $U'(\sum_{i\in I} W(s_i)(m_i)) = \sum_{i\in I} V(s_i)(m_i)$ pro všechna $s \in X$ a $m \in H$. U a U' jsou navzájem inverzní. Máme pak

$$\begin{gathered}\left\langle U(\sum_{i\in I} V(s_i)(m_i)), \sum_{j\in J} W(t_j)(n_j)\right\rangle_W = \left\langle \sum_{i\in I} W(s_i)(m_i), \sum_{j\in J} W(t_j)(n_j)\right\rangle_W \\ = \sum_{i\in I, j\in J} \langle W(s_i)(m_i), W(t_j)(n_j)\rangle_W = \sum_{i\in I, j\in J} \langle W(t_j)(W(s_i)(m_i)), n_j\rangle = \\ \sum_{i\in I, j\in J} \langle \Phi(t_j, s_i)(m_i), n_j\rangle = \sum_{i\in I, j\in J} \langle m_i, \Phi(t_j, s_i)^*(n_j)\rangle = \\ \sum_{i\in I, j\in J} \langle m_i, \Phi(s_i, t_j)(n_j)\rangle = \sum_{i\in I, j\in J} \langle m_i, V(s_i)^*(V(t_j)(n_j))\rangle = \\ \sum_{i\in I, j\in J} \langle V(s_i)(m_i), V(t_j)(n_j)\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} V(s_i)(m_i), \sum_{j\in J} V(t_j)(n_j)\right\rangle = \\ \left\langle \sum_{i\in I} V(s_i)(m_i), U'(\sum_{j\in J} W(t_j)(n_j)\right\rangle,\end{gathered}$$

pro všechna $s_i, t_j \in X$, $m_i, n_j \in H$, $i \in I$, $j \in J$. Tudíž, U je adjungované k $U^* = U' = U^{-1}$ a tedy U je a unitární zobrazení. Celkem je $U(V(s)) = W(s)$, pro všechna $x \in X$. $\square$

Definice 2.6 *Hilbertův prostor z věty 2.5 nazýváme* Hilbertův prostor s reprodukčním jádrem Φ *(někdy rovněž* autoreprodukční Hilbertův prostor*).*

Příklad 2.7 Nechť $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $\mathbf{K}$ je nezáporně defininitní symetrická reálná matice řádu $n \times n$. Na prostoru $\mathrm{Im}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = \mathbf{K}(\mathbf{a})\}$ definujme bilineární funkci $\langle -, - \rangle$ předpisem:

$$\langle \mathbf{K}(\mathbf{a}_1), \mathbf{K}(\mathbf{a}_2) \rangle_{\mathbf{K}} = \mathbf{a}_1^T \mathbf{K} \mathbf{a}_2.$$

Zřejmě je $\langle -, - \rangle_{\mathbf{K}}$ skalární součin (stačí ověřit definitnost a ta plyne z rozkladu $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}^{\frac{1}{2}}$).

Příklad 2.8 Buď $\{X_t : t \in T\}$ náhodný proces, pro který platí $E[X^2(t)] < \infty$ pro všechna $t \in T$ a nechť $m(t) = E[X(t)]$; $t \in T$. Pak reálnou funkci

$$R(s, t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = E[(X(s) - m(s))(X(t) - m(t))]$$

nazýváme *kovarianční funkcí náhodného procesu* X. Snadno se ověří, že $R(s, t)$ je hermitovské jádro.

Položme $H_R = FH(\{R(-, t)\}_{t \in T})$. Můžeme si pak H_R představit jako Hilbertův prostor generovaný náhodným procesem $\{X(t) : t \in T\}$, přičemž platí

$$R(s, t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \langle R(-, s), R(-, t) \rangle ,$$

tj. skalární součin v H_R je určen kovarianční funkcí.

Přitom norma vektoru $R(-, t)$ je určena vztahem

$$\begin{aligned} ||R(-, t)||^2 &= \langle R(-, t), R(-, t) \rangle = \mathrm{Cov}(X(t), X(t)) \\ &= E[(X(t) - m(t))(X(t) - m(t))] = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2. \end{aligned}$$

2.2 Hermitovské funkce pro úplné polosvazy s dualitou

Podobně, jako v 2.1 můžeme definovat tyto pojmy pro úplné polosvazy.

Buď X množina. Funkce $\Phi : X \times X \to \mathbf{2}$ se nazývá hermitovská, pokud $\Phi(u, v) = \Phi(v, u)$. Hermitovská funkce se nazývá *definitní*, jestliže $\Phi(u, u) = 0$

nám dává $u = 0$. *Hermitovským jádrem* pak rozumíme hermitovskou funkci Φ tak, že

$$\langle -, u\rangle = \langle -, v\rangle \quad \text{implikuje} \quad u = v.$$

Je-li navíc X involutivní pologrupa, můžeme přiřadit k funkci $\phi : X \to \mathbf{2}$ funkci $\Phi_\phi : X \times X \to \mathbf{2}$ předpisem $(x, y) \mapsto \phi(x^* \cdot y)$.

Poznámka 2.9 Analogicky, jako pro Hilbertovy prostory, můžeme rozšířit výše zavedené pojmy na zobrazení $\Phi : X \times X \to \mathcal{Q}(S)$, kde S je úplný polosvaz s dualitou (resp. ortokomplementární úplný polosvaz). Protože $\mathcal{Q}(\mathbf{2}) \simeq \mathbf{2}$, pokrývá toto rozšíření i standardní definici.

Volný úplný polosvaz nad množinou X existuje a je to úplná Booleova algebra všech podmnožin $\mathbf{2}^X$ generovaná množinou $\{\mathbf{e}_x\}_{x\in X}$, kde $\pi_y \mathbf{e}_x = \delta_{xy}$, δ_{xy} je Kroneckerovo delta. Můžeme jej ztotožnit se supremy tvaru je tvaru

$$\bigvee_{x\in X} x f(x),$$

kde $f : X \to \mathbf{2}$ je zobrazení, resp. s $\mathcal{P}(X)$.

Věta 2.10 *Buď nyní $\Phi : X\times X \to \mathbf{2}$ hermitovská funkce. Pak $\mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X})$ je volný úplný polosvaz opatřený hermitovskou funcí $\langle -, -\rangle : \mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X})\times \mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X}) \to \mathbf{2}$ tak, že*

$$\langle \Phi(-, x), \Phi(-, y)\rangle = \Phi(x, y)$$

a pro každý úplný polosvaz $\mathbf{W}$ s hermitovskou funkcí $\langle -, -\rangle_{\mathbf{W}}$ a zobrazení $f : X \to \mathbf{W}$ splňující

$$\langle f(x), f(y)\rangle_{\mathbf{W}} = \Phi(x, y)$$

existuje zobrazení zachovávající libovolná suprema $g : \mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X}) \to W$ tak, že $g(\Phi(-, x)) = f(x)$.

Důkaz. Pro funkci $f : X \to \mathbf{2}$ položme $f_\Phi = \bigvee_{x\in X} \Phi(-, x)f(x)$ tj. každý prvek z $\mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X})$ je tohoto tvaru. Přitom f_Φ lze považovat zároveň za zobrazení z X do $\mathbf{2}$ definované předpisem $f_\Phi(y) = \bigvee_{x\in X} \Phi(y, x)f(x)$.

Opatřme nyní $\mathcal{P}(\{\Phi(-, x)\}_{x\in X})$ hermitovskou funkcí. Buď $f, g : X \to \mathbf{2}$ funkce. Položme

$$\langle f_\Phi, g_\Phi\rangle = \bigvee_{x,y\in X} \langle \Phi(y, x)f(x), g(y)\rangle .$$

Pak toto zobrazení zachovává suprema jak v první komponentě tak i v druhé. Navíc
$$\begin{aligned}\langle f_\Phi, g_\Phi\rangle &= \bigvee_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x)f(x), g(y)\rangle\\ &= \bigvee_{x,y\in X} \langle \Phi(x,y)g(y), f(x)\rangle\\ &= \langle g_\Phi, f_\Phi\rangle .\end{aligned}$$

Poznámka 2.11 Podobně, jako pro Hilbertovy prostory, výše uvedené platí s hermitovské jádro $\Phi : X\times X \to \mathcal{Q}(S)$. Zápis $\Phi(y,x)f(x)$ bude představovat aplikaci $\Phi(y,x)(f(x))$ (a tedy můžeme za prvky naší volné konstrukce brát formální spojení

$$f_\Phi = \bigvee_{x\in X} \Phi(-,x)f(x), f : X \to S \text{ funkce}),$$

f_Φ budeme ztotožňovat s g_Φ, pokud $\bigvee_{x\in X} \Phi(y,x)f(x) = \bigvee_{x\in X} \Phi(y,x)g(x)$ pro všechna $y \in X$. Přitom $\varphi^x : X \to \mathbf{2}$ nahradíme zobrazeními zobrazení $\varphi^{x,h} : X \to S$ definovanými předpisem

$$\varphi^{x,h}(y) = \begin{cases} h & x = y\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pak je $\Phi(x,y)(h) = \varphi^{y,h}_\Phi(x)$.

Příslušný úplný polosvaz se skalárním součinem budeme označovat $\mathbf{S}_\Phi$. Stejně jako výše bude skalární součin tvaru

$$\langle f_\Phi, g_\Phi\rangle_{S_\Phi} = \bigvee_{x,y\in X} \langle \Phi(y,x)f(x), g(y)\rangle_S .$$

Speciálně

$$\left\langle \varphi^{y,h_1}, \varphi^{x,h_2}\right\rangle_{S_\Phi} = \langle \Phi(y,x)(h_1), h_2\rangle_S .$$

Definice 2.12 *Buď $\Phi : X \times X \to \mathcal{Q}(S)$ hermitovské jádro, S, S' úplné polosvazy s dualitou (ortokomplementární úplné svazy), $V : X \to \mathcal{Q}(S,S')$. Řekneme, že zobrazení V je* Kolmogorovův rozklad *jádra Φ, jestliže*

$$\Phi(x,y) = (V^*(x) \circ V(y))$$

pro všechna $x, y \in X$. Pokud navíc

$$\{\bigvee_{i\in I} V(x_i)(s_i) : x_i \in X, s_i \in S\} = S',$$

říkáme, že zobrazení V je minimální Kolmogorovův rozklad *jádra Φ.*

Věta 2.13 O Kolmogorově rozkladu *Buď nyní* $\Phi : X \times X \to \mathcal{Q}(S)$ *hermitovské jádro,* S *úplný polosvaz s dualitou (ortokomplementární úplný svaz). Pak existuje úplný polosvaz s dualitou (ortokomplementární úplný svaz)* S_Φ *se skalárním součinem* $\langle -, - \rangle : S_\Phi \times S_\Phi \to \mathbf{2}$ *tak, že*

$$\langle f_\Phi, g_\Phi \rangle_{S_\Phi} = \sum_{x,y \in X} \langle \Phi(y,x) f(x), g(y) \rangle_S .$$

Navíc zobrazení $V : X \to \mathcal{Q}(S, S_\Phi)$ *definované předpisem*

$$V(x)(h) = \varphi_\Phi^{x,h} = \sum_{z \in X} \Phi(-, z) \varphi^{x,h}(z)$$

tvoří minimální Kolmogorův rozklad pro Φ*. Je-li navíc* $W : X \to \mathcal{Q}(S, S_W)$ *jiný takový minimální Kolmogorův rozklad pro* Φ*, existuje jediné unitární izomorfismus* $U : H_\Phi \to H_W$ *tak, že* $U \circ V_x = W(x)$*, pro všechna* $x \in X$*.*

Důkaz. Kopíruje důkaz pro Hilbertovy prostory. $\square$

Příklad 2.14 Nechť $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $\mathbf{K}$ je symetrická matice řádu $n \times n$ nad množinou $\{0, 1\}$. Na svazu $\mathrm{Im}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{b} : \mathbf{b} = \mathbf{K}(\mathbf{a})\}$ definujme funkci $\langle -, - \rangle$ předpisem:

$$\langle \mathbf{K}(\mathbf{a}_1), \mathbf{K}(\mathbf{a}_2) \rangle_{\mathbf{K}} = \mathbf{a}_1^T \mathbf{K} \mathbf{a}_2,$$

kde místo sčítání použijeme operaci spojení. Zřejmě je $\langle -, - \rangle_{\mathbf{K}}$ skalární součin. Tím obdržíme operaci ortokomplementu na $\mathrm{Im}(\mathbf{K})$.

3 Dilatace v Hilbertových prostorech a úplných polosvazech s dualitou

3.1 Dilatace v Hilbertových prostorech

Nechť $\phi \in B(H)$, $\psi \in B(H')$, H, H' jsou Hilbertovy prostory. Operátor ψ je *dilatací* operátoru ϕ a operátor ϕ je operátoru ψ, pokud existuje izometrie $W : H \to H'$ tak, že $\phi = W^* \circ \psi \circ W$. Ekvivalentně, můžeme předpokládat, že H je uzavřený podprostor H' a pak existuje projekce $P_H : H' \to H'$ prostoru H' na H tak, že $\phi = P_H \circ \psi$.

Účelem teorie dilatací je získat užitečné informace o obtížných operátorech nalezením jejich snadných dilatací. Tento projekt byl navýsost úspěšný. Unitární operátory patří k těm, se kterými dá nejsnáze pracovat. Navíc se zjistilo, že v podstatě každý lineární ohraničený operátor až na normovanost má unitární dilataci. Je-li ψ unitární dilatace ϕ, je

$$||\phi(x)|| = ||P_H(\psi(x))|| \leq ||\psi(x)|| = ||x||.$$

Nutně tedy musí být ϕ kontrakce, tj. $||\phi|| \leq 1$. Ale tato podmínka je i dostatečná: *každá kontrakce má unitární dilataci.* Důkaz je explicitní: definujeme $\psi : H \oplus H \to H \oplus H$ předpisem

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi & \sigma \\ \tau & -\phi^* \end{pmatrix}.$$

Zde $\sigma = \sqrt{1 - \phi\phi^*}$, $\tau = \sqrt{1 - \phi^*\phi}$.

Co ale dělá teorii dilatací tak užitečnou, je Nagyova věta:

Věta 3.1 (Sz. Nagy, Foias) *Pro kontrakci $\phi \in B(H)$ existuje její unitární dilatace $\psi \in B(H')$ tak, že*

$$\phi^k = W^* \circ \psi^k \circ W$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Snadným důsledkem této věty je tvrzení, že pro každý komplexní polynom $p(z)$ a kontrakci $\phi \in B(H)$ platí

$$||p(\phi)|| \leq \sup\{|p(z)| : |z| \leq 1\}.$$

Naimark (1943) dokázal následující větu:

Věta 3.2 *Buď H Hilbertův prostor, G grupa, $\rho : G \to B(H)$ zobrazení takové, že $\Phi(x, y) = \rho(x^{-1}y)$ je hermitovské jádro z $G \times G$ do $B(H)$. Pak existuje minimální Kolmogorovův rozklad $V : G \to B(H, H_V)$ pro Φ. Navíc, existuje $W \in B(H, H_V)$ a unitární reprezentace U grupy G na H_V tak, že*

$$\rho(x) = W^* \circ U(x) \circ W,$$

pro všechna $x \in G$ a

$$H_V = cl(\mathrm{Lin}(\{U(x)(W(m)) : x \in G, m \in H\}).$$

Důkaz věty 3.1. Definujme zobrazení $\rho_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to B(H)$ předpisem

$$\rho_{\mathbb{Z}}(m) = \begin{cases} \phi^m; & \text{pokud } m > 0 \\ (\phi^*)^m; & \text{pokud } -m > 0 \\ \mathrm{id}_M; & \text{pokud } m = 0 > 0. \end{cases}$$

and a map $k_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to B(H)$ předpisem

$$k_{\mathbb{Z}}(m, n) = \rho_{\mathbf{Z}}(n - m).$$

Evidentně, $k_{\mathbb{Z}}$ splňuje předpoklady věty 3.2 tj. existuje unitární reprezentace U grupy $\mathbb{Z}$ na H_V tak, že $\rho_{\mathbb{Z}}(m) = W^* \circ U(m) \circ W$, $U(m) = U(1)^m$, $\rho_{\mathbb{Z}}(m) = \phi^m$ pro $m > 0$, $\psi = U(1)$ i.e. $\phi^m = W^* \circ \psi^m \circ W$. $\square$

3.2 Dilatace v úplných polosvazech s dualitou

Rádi bychom výsledky z předchozího odstavce přenesli na úplné polosvazy s dualitou. Podobně jako v předchozím můžeme definovat dilataci. Dále budeme potřebovat následující definici:

Definice 3.3 *Buď G grupa, S úplný svaz s dualitou (úplný ortokomplementární svaz), $\Phi : G \times G \to \mathcal{Q}(S)$ hermitovské jádro tak, že*

$$\Phi(a, b) = \Phi(ca, cb), \quad \Phi(c, c) = \mathrm{id}_S$$

pro všechna $a, b, c \in G$. Pak Φ se nazývá Toeplitzovo jádro.

Řekneme, že hermitovské jádro $\Phi : G \times G \to \mathcal{Q}(S)$ má Naimarkovu dilataci, *pokud existuje úplný polosvaz s dualitou (úplný ortokomplementární polosvaz) S_Φ, izometrie $W \in \mathcal{Q}(S, S_\Phi)$ a grupa $\{U_a\}_{a \in G}$ unitárních operátorů na S_Φ, která dilatuje Φ, tj.*

- $U_a \circ U_b = U_{ab}$,
- $U_e = \mathrm{id}_{S_\Phi}$,
- $\Phi(a, b) = W^* \circ U_a^* \circ U_b \circ W$

pro všechna $a, b \in G$. $U : G \to \mathcal{Q}(S)$ je pak unitární reprezentací grupy G v $\mathcal{Q}(S)$.

Naimarkova dilatace se nazývá minimální, *jestliže*

$$S_\Phi = \{ \bigvee_{a \in G_1, m \in N} U_a(w(m)) : G_1 \subseteq G, N \subseteq S \}.$$

Věta 3.4 Naimarkova věta pro úplné polosvazy s dualitou *Buď G grupa, S úplný polosvaz s dualitou (ortokomplementární úplný polosvaz), $\Phi : G \times G \to \mathcal{Q}(S)$ hermitovské jádro. Pak Φ je Toeplitzovo jádro právě tehdy, když má minimální Naimarkovu dilataci. V tomto případě je minimální Naimarkova dilatace jediná až na izomorfismus.*

Proof. Buď V minimální Kolmogorovův rozklad pro Φ. Nechť $x, y, z \in G$. Pak

$$V(zx)^* \circ V(zy) = \Phi(zx, zy) = \Phi(x, y) = V(x)^* \circ V(y).$$

Položme $V_z(x) = V(zx)$. Pak $V_z : G \to \mathcal{Q}(S, S_\Phi)$ je rovněž minimální Kolmogorovův rozklad pro Φ. Máme tedy unitární zobrazení $U_z : S_\Phi \to S_\Phi$ takové, že

$$U_z(\bigvee_{x \in T, s \in N} V(x)(s)) = \bigvee_{x \in T, s \in N} V(zx)(s).$$

Snadno se ověří, že unitární zobrazení U_z, $z \in G$ splňují požadavky na minimální Naimarkovu dilataci, definujeme $W : S \to S_\Phi$ předpisem $s \mapsto V(e)(s)$.

Pro důkaz obráceného směru předpokládejme, že $\{U_z\}_{z \in G}$ tvoří unitární reprezentaci grupy G na úplném polosvazu s dualitou S_Φ, $W : S \to S_\Phi$ homomorfismus úplných polosvazů. Víme, že $\Phi(ca, cb) = W^* \circ U_{ca}^* \circ U_{cb} \circ W = W^* \circ U_a^* \circ U_c^* \circ U_c \circ U_b \circ W = W^* \circ U_a^* \circ U_b \circ W = \Phi(a, b)$ a $\Phi(e, e) = W^* \circ U_e^* \circ U_e \circ W = W^* \circ W = \mathrm{id}_S$. $\square$

Věta 3.5 *Pro zobrazení $\phi \in \mathcal{Q}(S)$, S úplný polosvaz s dualitou (úplný ortokomplementární polosvaz) existuje její unitární dilatace $\psi \in \mathcal{Q}(S')$ tak, že S' je úplný polosvaz s dualitou (úplný ortokomplementární polosvaz), $W \in \mathcal{Q}(S, S')$ izometrie a*

$$\phi^k = W^* \circ \psi^k \circ W$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Stejně jako 3.1.

Věta 3.6 Stinespringova věta o dilataci *Buď S_1 a S_2 úplné polosvazy s dualitou (ortokomplementární úplné polosvazy) a $\rho : \mathcal{Q}(S_1) \to \mathcal{Q}(S_2)$ homomorfismus úplných polosvazů zachovájící involuci. Pak existuje úplný polosvaz s dualitou (ortokomplementární úplný polosvaz) S_ρ a homomorfismus úplných polosvazů zachovájící involuci a násobení $\pi_\rho : \mathcal{Q}(S_1) \to \mathcal{Q}(S_\rho)$ a prvek $W_\rho \in \mathcal{Q}(S_2, S_\rho)$ tak, že $\rho(b) = W_\rho^* \circ \pi_\rho(b) \circ W_\rho$, pro všechna $b \in \mathcal{Q}(S_1)$.*

Navíc máme $S_\rho = \{\bigvee_{i\in I}(\pi_\rho(b_i)\circ W_\rho)(s_i) : b_i \in \mathcal{Q}(S_1), s_i \in S_2, i \in I\}$. *a minimální Stinespringova dilatace je jediná až na izomorfismus. Pokud* $\rho\mathrm{id} = \mathrm{id}$, *je* W_ρ *izometrie.*

Důkaz. Položme

$$\pi_\rho(b)(\bigvee_{i\in I} V(c_i)(s_i)) = \bigvee_{i\in I} V(b\cdot c_i)(s_i). \quad \square$$

3.3 Aplikace na úplné polosvazy

Lemma 3.7 *Buď* L *úplný polosvaz,* $f : L \to L$ *homomorfismus úplných polosvazů. Pak zobrazení* $\overline{f} = f \times f^{\dashv} : L \times L^{op} \to L \times L^{op}$ *zachovává libovolná suprema,* $L \times L^{op}$ *úplný polosvaz s dualitou* $'$; *zde* $f^{\dashv}$ *je pravý adjunkt k* f, *tj.* $f^{\dashv}(y) = \bigvee\{x : f(x) \leq y\}$ *a* $(a,b)' = (b,a)$. *Navíc máme injektivní homomorfismus úplných polosvazů* $\iota_f : L \to L \times L^{op}$ *a surjektivní homomorfismus úplných polosvazů* $\nu_f : L \times L^{op} \to L$ *tak, že* $f = \nu_f \circ (f \times f^{\dashv}) \circ \iota_f$.

Důkaz. Položme $\iota_f(l) = (l, 1)$ and $\nu_f(l,k) = l$ pro všechna $l, k \in L$. Pak obě zobrazení zachovávají libovolná suprema, ι_f is injektivní a ν_f je surjektivní zobrazení. Protože $f^{\dashv}$ zachovává libovolné průseky v L, zachovává libovolná spojení v L^{op}. Pak $f \times f^{\dashv}$ zachovává libovolná suprema, $(\nu_f \circ (f \times f^{\dashv}) \circ \iota_f)(l) = (\nu_f \circ (f \times f^{\dashv}))(l, 1) = \nu_f(f(l), f^{\dashv}(1)) = f(l)$. $\square$

Tvrzení 3.8 *Buď* L *úplný polosvaz,* $f : L \to L$ *zachovává libovolná suprema. Pak existuje úplný polosvaz* K *s dualitou, injektivní homomorfismus zachovávající libovolná suprema* $\mathbf{i}_L : L \to K$, *surjektivní homomorfismus zachovávající libovolná suprema* $\mathbf{n}_L : K \to L$ *a automorfismus zachovávající libovolná suprema* $g : K \to K$ *tak, že* f^n *je dilatován na automorfismus zachovávající libovolná suprema* g^n *tj.* $f^n = \mathbf{n}_L \circ g^n \circ \mathbf{i}_L$.

Proof. Dle věty 3.5 existuje unitární dilatace $g : K \to K$ zobrazení $f \times f^{op}$ tak, že $(f \times f^{op})^n = W^* \circ g^n \circ W$. Položme $\mathbf{i}_L = W \circ \iota_f$, $\mathbf{n}_L = \nu_f \circ w^*$. Protože W je injektivní zobrazení zachovávající libovolná suprema a W^* surjektivní zobrazení zachovávající libovolná suprema tak, že $\mathbf{i}_L : L \to K$ je injektivní zobrazení zachovávající libovolná suprema a $\mathbf{n}_L : K \to L$ je surjektivní zobrazení zachovávající libovolná suprema. Máme pak, pro všechna $l \in L$, $(\mathbf{n}_L \circ g^n \circ \mathbf{i}_L)(l) = \nu_f((w^* \circ g^n \circ w)(\iota_f(l))) = \nu_f((f \times f^{op})^n)(l, 1)) = \nu_f(f^n(l), (f^{op})^n(1)) = f^n(l)$. $\square$