Topologie – jaro 2010 – 2. termín

1. Definujte $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory a napište, jaký je jejich vztah k metrizovatelným prostorům a ke kompaktním T_2-prostorům. Uveďte tvrzení a konstrukce, které se při důkazu těchto vztahů používají.

2. Definujte uniformní prostor a stejnoměrně spojité zobrazení uniformních prostorů. Uveďte, za jakých podmínek je stejnoměrně spojité zobrazení spojité, a naopak, spojité zobrazení stejnoměrně spojité. Jedno z těchto tvrzení dokažte.

3. Nechť X a Y jsou lokálně kompaktní prostory. Dokažte, že je-li zobrazení $f\colon X \to Y$ spojité na všech kompaktních podprostorech X, potom je spojité. Ukažte, že bez předpokladu lokální kompaktnosti tvrzení neplatí.
(Nápověda: Uvažte například prostor spočetných komplementů.)

4. Uvažme podprostor $X = \{\, 1/n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{0\}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}$ a nechť Y je neprázdný otevřený podprostor prostoru $X^{\mathbb{N}}$ se součinovou topologií. Určete, které z následujících vlastností má prostor Y: T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4, diskrétní, metrizovatelný, uniformizovatelný, kompaktní, lokálně kompaktní, souvislý, křivkově souvislý, lokálně souvislý, jednoduše souvislý, totálně nesouvislý, 0-dimenzionální, Stoneův, separabilní, stažitelný. Svoje tvrzení zdůvodněte. Pokud pro některou vlastnost mohou nastat obě varianty, uveďte pro každou z nich příklad takového Y.

5. (a) Dejte příklad separabilního topologického prostoru, z něhož odebráním jednoho bodu vznikne prostor, který separabilní není.

   (b) Dejte příklad topologického prostoru a jeho dvou souvislých kompaktních podprostorů takových, že jejich průnik je nekonečný a totálně nesouvislý.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.