Topologie – jaro 2008 – 2. termín

1. Definujte uniformní prostor a stejnoměrně spojité zobrazení uniformních prostorů. Definujte topologii indukovanou uniformitou a dokažte, že každé stejnoměrně spojité zobrazení je vzhledem k indukovaným topologiím spojité.

2. Uveďte dvě ekvivalentní definice lokálně kompaktního prostoru. Definujte jednobodovou kompaktifikaci. Ověřte, že prostor vytvořený touto konstrukcí je skutečně kompaktní. Napište, které topologické prostory mají kompaktifikaci, a svoje tvrzení zdůvodněte.

3. Určete, které topologické prostory jsou současně lokálně souvislé a totálně nesouvislé. Svoje tvrzení dokažte.

4. Určete, které z následujících vlastností má prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se součinovou topologií: T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, kompaktnost, souvislost, křivková souvislost, lokální souvislost, totální nesouvislost. Svoje rozhodnutí zdůvodněte, přičemž z vět o součinech prostorů majících některou z posledních čtyř vlastností smíte použít jen ty, které dokážete.

5. (a) Dejte příklad topologického prostoru, který je křivkově souvislý, není jednoduše souvislý a má retrakt homeomorfní uzavřenému intervalu.

   (b) Dejte příklad předuspořádané množiny $(X, \leq)$ takové, že topologie na X obsahující právě množiny nahoru uzavřené v $\leq$ není T_0 ani T_4.

   Zdůvodněte, že vámi uvedené prostory skutečně splňují požadované podmínky.