

Úloha 1: Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$a \cdot \left| \frac{x}{x^2 - a^2} \right| \leq 1$$

a určete, pro která z nich nastává rovnost.

Úloha 2a: Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\sqrt{2} \cdot (x - a)}{\sqrt{a^2 x - 2a^3}} + \frac{\sqrt{2x - a}}{a} \geq 0$$

a určete, pro která z nich nastává rovnost.

Úloha 2b: Pro všechna $a \in \mathbb{R}$ nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\sqrt{\frac{-2a - x}{x^2 + a^2}} + \frac{\sqrt{-x}}{a - x} \leq 0$$

a určete, pro která z nich nastává rovnost.

Úloha 3: Vyřešte v oboru reálných čísel následující rovnice:

$$2 \cdot 2^{2x+1} + 6^x = 6^{x+1} + 9^{x+1}$$
$$\log_2 \left(x^2 \cdot \log_3 2^{\log_3 \sqrt{3}} \right) + \log_2 \log_2 3 = 1$$

Úloha 4: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\log_x \frac{2 - 3x}{1 - 2x} \leq \log_x(4 - x)$$

Úloha 5a: O Lojzíkovi a Frantíkovi víme, že vždy buď oba mluví pravdu nebo oba lžou. Zformulujte dvě neekvivalentní tvrzení, na která Vám nebudou moci nikdy říct:

Lojzík: „Je mi zima a říkáš-li pravdu, pak je zima Frantíkovi.“

Frantík: „Je-li zima mně, pak je tvoje tvrzení ekvivalentní tvrzení, že je zima Lojzíkovi.“

Svoji odpověď zdůvodněte.

Úloha 5b: Zformulujte dva neekvivalentní výroky T takové, že výrok

„Pokud prší nebo fouká, tak platí T , a pokud platí T , tak fouká.“

je ekvivalentní výroku

„Prší a fouká.“

Svoje tvrzení zdůvodněte.

Úloha 6: Nalezněte všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující

$$\sin x \cdot (\sin x + \cos x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Úloha 7: Určete, pro která komplexní čísla z platí

$$(1 + i) \cdot z + 3 + i = \frac{i - 1}{z}$$

Úloha 8: Nalezněte všechna komplexní čísla z taková, že číslo $z^3 + 1$ je reálné kladné.

Úloha 9a: Na stole leží deset semínek ředkvičky a dvacet semínek mrkve. (Mezi semínky stejné plodiny nerozlišujeme.)

- 1) Určete, v kolika různých pořadích lze zaset tato semínka do řádku.
- 2) Určete, kolika různými způsoby je možné rozdělit tato semínka do dvou sáčků tak, aby v každém z nich bylo alespoň šest mrkvových semínek. (Mezi sáčky rozlišujeme.)
- 3) Určete pravděpodobnost, že vybereme-li náhodně dvě z těchto semínek, budou obě semínka ředkvičky.
- 4) Určete pravděpodobnost, že pokud dvě náhodně vybraná semínka zasejeme, nevzklíčí z nich nic jiného než ředkvičky, víme-li, že pravděpodobnost vyklíčení libovolného semínka je $1/3$.

Úloha 9b: Deset identických bílých koulí a dvacet identických červených koulí je náhodně rozděleno do dvou košů.

- 1) Určete, kolik různých rozložení koulí do košů může takto vzniknout, jestliže rozlišujeme mezi prvním a druhým košem.
- 2) Určete, kolik různých rozložení koulí do košů může takto vzniknout, jestliže mezi koši nerozlišujeme.
- 3) Určete pravděpodobnost, že všechny koule umístěné do prvního koše jsou bílé.
- 4) Určete pravděpodobnost, že do prvního koše bylo umístěno právě pět koulí a všech těchto pět koulí je bílých.