Úvod

Cílem tohoto textu je seznámit čtenáře se základními pojmy a nástroji topologie. Přestože pro jeho čtení je postačující znalostí ovládnutí základních matematických pojmů a konstrukcí, k jeho správnému pochopení je nutné se dříve seznámit se základy teorie metrických prostorů, algebry, případně teorie množin.

Cílem topologie je studium vlastností prostorů. Ovšem na rozdíl od teorie metrických prostorů se v topologii nezajímáme o vzdálenosti mezi body prostoru a prostory považujeme za stejné, pokud se na sebe dají vzájemně přeměnit nějakou spojitou deformací. Takže například nerozlišujeme mezi koulí a krychlí; ostatně koule se změní v krychli již při přechodu mezi dvěma ekvivalentními metrikami na $\mathbb{R}^3$.

Základním pojmem, který se proto v topologii studuje, je spojitost zobrazení. Můžeme si všimnout, že k tomu, abychom definovali spojitost zobrazení mezi metrickými prostory, vlastně nepotřebujeme vědět přesně, jak jsou od sebe které body daleko. Zcela si vystačíme s informací, že jisté body se nekonečně blíží k nějakému bodu prostoru. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je totiž spojité, jestliže pro libovolnou posloupnost bodů $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ prostoru X, která konverguje k nějakému bodu x, obrazy těchto bodů $(f(x_i))_{i=1}^{\infty}$ konvergují k bodu $f(x)$. Cílem zavedení pojmu topologického prostoru je umožnit formálně pracovat s následující definicí spojitosti, která se liší od obvyklé ε-δ-definice pouze v tom, že místo o jisté vzdálenosti mluví jen o blízkosti k určitému bodu:

> Zobrazení $f\colon X \to Y$ je spojité, jestliže pro libovolný bod x prostoru X a pro libovolné okolí $\mathscr{O}$ bodu $f(x)$ existuje nějaké okolí bodu x, jehož všechny body se zobrazí do $\mathscr{O}$.

Tato definice nám tedy ani neurčuje, jakým způsobem musíme blízkost bodů popisovat, ani nás nenutí porovnávat, zda dané dva body jsou od sebe vzdáleny více než jiné dva body ležící v jiné části prostoru. Tento přístup vede ke zobecnění pojmu metrického prostoru na prostor topologický, jehož definice je založena na pozorování, jaké vlastnosti okolí bodů v prostorech mají.

Abstraktnější přístup přináší některé výhody:

(1) Například můžeme provádět elegantní množinové argumenty a vyhnout se tak komplikovaným formulacím využívajícím ε-δ-zápisu.

(2) Na metrických prostorech existuje mnoho ekvivalentních metrik, ovšem většina pojmů studovaných v teorii metrických prostorů na volbě metriky nezávisí; jedná se totiž o pojmy topologické. Proto je užitečné mít možnost s těmito pojmy pracovat, aniž bychom předtím museli zvolit některou z těchto metrik a naše argumenty, které by stejně fungovaly i pro jinou metriku, provádět jen s touto jednou zvolenou.

(3) Obecný topologický přístup umožňuje provádět s prostory některé konstrukce, které obecně produkují z metrických prostorů prostory pomocí metrik nepopsatelné. Přitom se často jedná o běžně studované přirozené prostory. Příkladem takového prostoru je prostor všech reálných funkcí s bodovou konvergencí, tedy prostor, kde posloupnost funkcí $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ konverguje k nějaké funkci g, jestliže pro každé reálné číslo r posloupnost $(g_i(r))_{i=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $g(r)$.

V následujícím textu se budeme často setkávat s pojmem mírně zobecňujícím pojem metriky, zvaným *pseudometrika*, který se liší od metriky vypuštěním požadavku na nenulovost vzdálenosti dvou různých bodů. Tedy (X,ρ) je *pseudometrický prostor*, jestliže zobrazení $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ splňuje

(1) $\forall x,y \in X : \rho(x,y) \geq 0$,
(2) $\forall x \in X : \rho(x,x) = 0$,
(3) $\forall x,y \in X : \rho(x,y) = \rho(y,x)$,
(4) $\forall x,y,z \in X : \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Tento prostor je *metrický*, jestliže navíc platí

(5) $\forall x,y \in X : \rho(x,y) = 0 \implies x = y$.

KAPITOLA 1

Definice topologického prostoru

Topologický prostor lze definovat mnoha ekvivalentními způsoby, v závislosti na tom, který topologický pojem známý z metrických prostorů (jako třeba otevřená množina, uzavřená množina, okolí či uzávěr) budeme považovat za základní. Vlastnosti prostoru popíšeme pomocí vlastností tohoto pojmu, zbylé topologické pojmy prohlásíme za odvozené a pomocí základního pojmu je definujeme. Poté je samozřejmě třeba ukázat, že všechny takto vzniklé definice topologického prostoru ve skutečnosti popisují tytéž objekty. Tento přístup nám mimo jiné umožní kdykoli používat právě tu definici topologického prostoru, která se nám zrovna nejvíce hodí.

Nejčastěji se za základní definici topologického prostoru považuje následující definice pomocí otevřených množin:

DEFINICE 1.1 (topologického prostoru pomocí otevřených množin). *Topologií* na množině X rozumíme libovolný systém $\mathscr{T} \subseteq \wp(X)$ podmnožin X splňující

(1) $\emptyset, X \in \mathscr{T}$,
(2) $\forall A, B \in \mathscr{T} : A \cap B \in \mathscr{T}$,
(3) pro libovolnou indexovou množinu I a množiny $A_i \in \mathscr{T}$, pro $i \in I$, platí $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$.

Prvky topologie $\mathscr{T}$ se nazývají *otevřené množiny* a dvojice $(X, \mathscr{T})$ se nazývá *topologický prostor*. Prvky množiny X se nazývají *body* prostoru $(X, \mathscr{T})$.

Ekvivalentně můžeme říci, že topologie na X je systém podmnožin X uzavřený na libovolná sjednocení a konečné průniky.

Všimněte si, že množina $A \subseteq X$ je otevřená v prostoru $(X, \mathscr{T})$ právě tehdy, když pro každý její bod $x \in A$ existuje otevřená množina $B \in \mathscr{T}$ taková, že $x \in B \subseteq A$. Je tomu tak proto, že při splnění této podmínky platí $A = \bigcup\{B \in \mathscr{T} \mid B \subseteq A\}$, a tedy je A otevřená díky třetímu axiomu v definici topologie. K důkazu, že množina A je otevřená, stačí tedy ukázat, že libovolný bod množiny A je obsažen v nějaké podmnožině A, která je otevřená. Důkaz otevřenosti množiny se většinou provádí právě tímto způsobem.

Uvědomme si nyní, že každý pseudometrický prostor (X, ρ) lze skutečně chápat jako topologický prostor. Víme, že podmnožina pseudometrického prostoru je otevřená, jestliže s každým svým bodem obsahuje i nějakou kouli se středem v tomto bodě. Pro otevřenou kouli o poloměru ε se středem v bodě x budeme používat značení $\mathrm{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$. Potom můžeme definovat na X *topologii* $\mathscr{T}_\rho$ *indukovanou* pseudometrikou ρ následovně:

$$\mathscr{T}_\rho = \{A \subseteq X \mid \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0\colon \mathrm{B}(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Snadno se ověří, že $(X, \mathscr{T}_\rho)$ je skutečně topologický prostor. Na druhou stranu, o topologickém prostoru $(X, \mathscr{T})$ říkáme, že je *(pseudo)metrizovatelný*, jestliže na X existuje (pseudo)metrika ρ taková, že $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$.

Pokud máme na množině X dány dvě ekvivalentní metriky, tak indukují tutéž topologii. Topologii indukovanou euklidovskou metrikou na prostoru $\mathbb{R}^n$ (nebo kteroukoli ze standardních euklidovské metrice ekvivalentních metrik) značíme $\mathscr{E}$. Opačně ovšem není pravda, že indukují-li dvě metriky tutéž topologii, potom jsou ekvivalentní. Takovým příkladem jsou třeba metriky ρ a σ na $\mathbb{R}$ definované předpisy $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$.

PŘÍKLAD 1.2.

(1) Pro libovolnou množinu X je $(X, \wp(X))$ topologický prostor, zvaný *diskrétní*. Tento prostor je indukován například metrikou, kde vzdálenost libovolných dvou různých bodů je stejná.
(2) Pro libovolnou množinu X je $(X, \{\emptyset, X\})$ topologický prostor, zvaný *indiskrétní*. Snadno se nahlédne, že pro alespoň dvouprvkovou množinu X tento prostor není metrizovatelný, ale je indukovaný pseudometrikou, kde vzdálenost libovolných dvou bodů je nulová.
(3) Dvoubodový topologický prostor $(\{a,b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\})$ se nazývá *Sierpinského prostor*. Díky své asymetrii tento prostor není ani pseudometrizovatelný.
(4) Asymetrie ovšem nemusí být jediným důvodem, proč topologický prostor není pseudometrizovatelný, jak ukazuje příklad takzvaného *prostoru konečných komplementů* $(X, \mathscr{T})$ na nekonečné množině X, kde

$$A \in \mathscr{T} \iff A = \emptyset \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná.}$$

Pokud by totiž byla jeho topologie indukovaná nějakou pseudometrikou ρ, musela by existovat dvojice bodů $x, y \in X$ s nenulovou vzdáleností. Potom by koule $\mathrm{B}(x, \rho(x,y)/2)$ a $\mathrm{B}(y, \rho(x,y)/2)$ byly díky trojúhelníkové nerovnosti neprázdné otevřené disjunktní podmnožiny X, což je ve sporu s definicí topologie $\mathscr{T}$.

Komplementy otevřených podmnožin topologického prostoru nazýváme *uzavřené*. Díky De Morganovým zákonům je snadné ověřit, že topologické prostory lze ekvivalentně definovat takto:

DEFINICE 1.3 (topologického prostoru pomocí uzavřených množin). Dvojice $(X, \mathscr{F})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\mathscr{F} \subseteq \wp(X)$ a splňuje

(1) $\emptyset, X \in \mathscr{F}$,
(2) $\forall A, B \in \mathscr{F} : A \cup B \in \mathscr{F}$,
(3) pro libovolnou indexovou množinu I a množiny $A_i \in \mathscr{F}$, pro $i \in I$, platí $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathscr{F}$.

Prvky $\mathscr{F}$ se nazývají *uzavřené množiny*.

Mezi definicí pomocí otevřených množin a definicí pomocí množin uzavřených můžeme tedy přecházet takto:

$$\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathscr{T}\}, \qquad \mathscr{T} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \in \mathscr{F}\}.$$

Dalšími topologickými pojmy známými z teorie metrických prostorů, které můžeme pomocí otevřených množin zavést, jsou uzávěr, vnitřek a hranice podmnožiny topologického prostoru. Je-li $(X,\mathscr{T})$ topologický prostor a $A \subseteq X$ nějaká množina bodů X, definujeme *uzávěr* $\overline{A}$ (označovaný rovněž $\mathrm{cl}(A)$) množiny A v prostoru X jako nejmenší uzavřenou podmnožinu X obsahující A. Všimněme si, že díky axiomům topologického prostoru má skutečně každá množina A uzávěr, neboť jej můžeme získat jako průnik všech uzavřených množin obsahujících A. Je rovněž užitečné si uvědomit, jaké vyjádření uzávěru získáme, přeneseme-li tuto charakterizaci do duální řeči otevřených množin:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathscr{T} : x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset\}.$$

Podobně definujeme *vnitřek* A° množiny $A \subseteq X$ jako největší otevřenou podmnožinu X obsaženou v A. Všimněte si, že vnitřek je duálním pojmem k uzávěru, tedy že $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$. *Hranicí* (boundary) množiny A rozumíme rozdíl mezi jejím uzávěrem a vnitřkem. Množina A se nazývá *hustá* v prostoru X, jestliže jejím uzávěrem je celý prostor. Říkáme, že topologický prostor je *separabilní*, jestliže obsahuje nějakou nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

CVIČENÍ 1.4.

(1) Vyjádřete předchozí pojmy plně v řeči otevřených množin i plně v řeči uzavřených množin.
(2) Ukažte, že hranice je vždy uzavřená.
(3) Dejte příklad podmnožiny metrického prostoru $\mathbb{R}^2$, jejíž hranicí je celý prostor.

Pojem topologického prostoru můžeme definovat rovněž pomocí vlastností operátoru uzávěru:

DEFINICE 1.5 (topologického prostoru pomocí uzávěru). Dvojice $(X,\overline{\cdot})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\overline{\cdot}\colon \wp(X) \to \wp(X)$ je zobrazení splňující

(1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(2) $\forall A \subseteq X : A \subseteq \overline{A}$,
(3) $\forall A \subseteq X : \overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
(4) $\forall A,B \subseteq X : \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Abychom ověřili, že tato definice je ekvivalentní předchozí definici pomocí uzavřených množin, musíme nejprve pomocí uzávěru definovat, kdy je množina uzavřená:

$$\forall A \subseteq X : A \in \mathscr{F} \iff \overline{A} = A. \tag{1}$$

CVIČENÍ 1.6.

(1) Ověřte, že operátor uzávěru definovaný pomocí uzavřených množin splňuje axiomy v definici 1.5.
(2) Ukažte, že z axiomů v definici 1.5 plyne, že zobrazení $\overline{\cdot}$ je monotónní vzhledem k inkluzi, tedy že $\forall A \subseteq B \subseteq X : \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
(3) Ověřte, že uzavřené množiny definované předpisem (1) splňují axiomy v definici 1.3.

Všimněte si, že k ověření platnosti axiomů definice 1.3 nebylo třeba použít axiom 3 definice 1.5. Pokud bychom tento axiom vypustili, tak by sice nadále každý uzávěrový operátor definoval topologický prostor, ovšem stejný prostor by bylo možné zadat pomocí více různých uzávěrových operátorů, a v tomto smyslu by definice nebyly ekvivalentní. Abychom ověřili, že námi uvedené definice skutečně ekvivalentní jsou, potřebujeme ukázat následující:

(1) Uzávěrový operátor určený množinou uzavřených množin $\mathscr{F}$ definovanou předpisem (1) je roven původnímu operátoru $\overline{\cdot}$.
(2) Je-li $\overline{\cdot}$ uzávěrový operátor určený množinou $\mathscr{F}$ splňující definici 1.3, potom je splněna podmínka (1). Jinými slovy, získaný uzávěrový operátor definuje jako uzavřené právě původní uzavřené množiny.

Dokažme si první z těchto tvrzení. Víme, že nový uzávěr množiny A je roven nejmenší množině $F \in \mathscr{F}$ splňující $F \supseteq A$. Ukážeme, že touto množinou je právě $\overline{A}$. Množina $\overline{A}$ skutečně patří do $\mathscr{F}$ díky axiomu 3 a splňuje požadovanou inkluzi díky axiomu 2. Pokud je $F \in \mathscr{F}$ libovolná množina splňující $F \supseteq A$, potom $F = \overline{F}$ podle (1) a $\overline{F} \supseteq \overline{A}$ díky monotonii $\overline{\cdot}$ (cvičení 1.6.2). Dohromady tedy dostáváme $F \supseteq \overline{A}$, což ukazuje, že $\overline{A}$ je opravdu mezi těmito množinami nejmenší.

CVIČENÍ 1.7.

(1) Dokončete důkaz ekvivalence definic 1.3 a 1.5.
(2) Formulujte definici topologického prostoru pomocí vnitřku a zdůvodněte její ekvivalenci s předchozími definicemi.

Dalším užitečným topologickým pojmem, kterému se budeme věnovat, je okolí. Intuitivně, okolím daného bodu myslíme takovou množinu, která pro nějakou úroveň blízkosti obsahuje všechny body, které jsou k tomuto bodu takto blízko. Formálně, říkáme, že množina $A \subseteq X$ je *okolím* (neighbourhood) bodu $x \in X$ v topologickém prostoru $(X, \mathscr{T})$, jestliže existuje otevřená množina $U \in \mathscr{T}$ splňující $x \in U \subseteq A$. Množinu všech okolí bodu x značíme $\mathscr{T}(x)$.

Topologický prostor můžeme ekvivalentně definovat také pomocí vlastností okolí.

DEFINICE 1.8 (topologického prostoru pomocí okolí). Dvojice $(X, \mathscr{T})$ se nazývá topologický prostor, jestliže $\mathscr{T}\colon X \to \wp(\wp(X))$ je zobrazení, které pro každý bod $x \in X$ splňuje

(1) $X \in \mathscr{T}(x)$,
(2) $\forall A \in \mathscr{T}(x)\colon x \in A$,
(3) $\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \forall B \subseteq X\colon A \subseteq B \implies B \in \mathscr{T}(x)$,
(4) $\forall A, B \in \mathscr{T}(x)\colon A \cap B \in \mathscr{T}(x)$,
(5) $\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \exists B \in \mathscr{T}(x)\ \forall y \in B\colon A \in \mathscr{T}(y)$
(tato podmínka v podstatě říká, že v každém okolí A bodu x existuje nějaké podokolí, které neobsahuje žádné body hranice A).

Ukažme si, že i tato definice je ekvivalentní definici pomocí otevřených množin. Stejně jako v případě uzávěru nejprve zadefinujme původní pojem otevřené množiny pomocí okolí: množina je otevřená, jestliže je okolím každého svého bodu, tedy

(2) $$\forall A \subseteq X\colon A \in \mathscr{T} \iff (\forall x \in A)(A \in \mathscr{T}(x)).$$

CVIČENÍ 1.9.

(1) Ověřte, že okolí bodů v topologickém prostoru splňují axiomy v definici 1.8.
(2) Ověřte, že otevřené množiny definované předpisem (2) splňují axiomy v definici 1.1.
(3) Dokažte, že okolí bodů v topologickém prostoru určeném množinou otevřených množin $\mathscr{T}$ splňují podmínku (2).

K ověření ekvivalence definic 1.8 a 1.1 zbývá kromě faktů uvedených ve cvičení 1.9 již jen ukázat, že pokud pomocí libovolného zobrazení $\mathscr{T}$ splňujícího axiomy definice 1.8 definujeme otevřené množiny, tak se okolí určená těmito množinami budou shodovat s těmi, která zadává zobrazení $\mathscr{T}$. Ukážeme tedy, že množina A je okolím bodu x právě tehdy, když $A \in \mathscr{T}(x)$.

Je-li A okolím x, existuje otevřená množina $U \in \mathscr{T}$ splňující $x \in U \subseteq A$. Podle (2) tedy platí $U \in \mathscr{T}(x)$ a axiom 3 říká, že i $A \in \mathscr{T}(x)$.

Opačně, pokud $A \in \mathscr{T}(x)$, musíme prokázat, že A je okolím x, a to tak, že najdeme otevřenou množinu $U \subseteq A$ obsahující x. Za tuto množinu je přirozené volit vnitřek množiny A, přičemž vnitřek můžeme pomocí okolí popsat následovně:

$$U = \{y \in X \mid A \in \mathscr{T}(y)\}.$$

Takto definovaná množina U je podmnožinou A díky axiomu 2. Zbývá tedy ukázat, že U je otevřená podle předpisu (2). Vezmeme-li ovšem libovolný bod $y \in U$, víme o něm, že $A \in \mathscr{T}(y)$, a tedy podle axiomu 5 existuje $B \in \mathscr{T}(y)$, jejíž každý bod z splňuje $A \in \mathscr{T}(z)$. Proto je B podmnožinou U a díky axiomu 3 dostáváme $U \in \mathscr{T}(y)$, čímž je otevřenost U dokázána.

Chceme-li zadat nějaký topologický prostor, není většinou výhodné popsat přímo některý z pojmů zavedených v předchozích definicích. V případě definice pomocí otevřených množin lze využít, na jaké operace je množina $\mathscr{T}$ uzavřená, a popsat pouze dostatek otevřených množin, ze kterých je již možné pomocí těchto operací vygenerovat celou množinu $\mathscr{T}$. Pojmy, které se v této souvislosti používají, jsou báze a subbáze.

Je-li $(X, \mathscr{T})$ topologický prostor, potom o množině otevřených množin $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ říkáme, že je *bází* topologie $\mathscr{T}$, jestliže každý prvek $\mathscr{T}$ je sjednocením nějakých prvků $\mathscr{B}$. Například topologii indukovanou pseudometrikou jsme vlastně definovali pomocí báze složené ze všech koulí $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Ekvivalentně ji ovšem můžeme definovat pomocí báze $\mathscr{B} = \{\mathrm{B}(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$.

CVIČENÍ 1.10. Dejte příklad spočetné báze prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathscr{E})$.

Abychom mohli topologické prostory zadávat pomocí bází, potřebujeme jen vědět, které množiny podmnožin X jsou bází nějaké topologie.

TVRZENÍ 1.11. *Množina $\mathscr{S} \subseteq \wp(X)$ je bází nějaké topologie na množině X právě tehdy, když $\bigcup \mathscr{S} = X$ a*

$$\forall A, B \in \mathscr{S}\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \mathscr{S} : x \in C \subseteq A \cap B. \tag{3}$$

CVIČENÍ 1.12. Dokažte tvrzení 1.11.

Podmnožina topologie $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ se nazývá *subbáze* topologie $\mathscr{T}$, jestliže každý prvek $\mathscr{T}$ je sjednocením konečných průniků prvků $\mathscr{S}$, tedy jestliže konečné průniky prvků $\mathscr{S}$ tvoří bázi $\mathscr{T}$.

PŘÍKLAD 1.13. Množina intervalů $\{(-\infty, a), (a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ je subbází prostoru $(R, \mathscr{E})$.

CVIČENÍ 1.14. Ukažte, že každá množina $\mathscr{S} \subseteq \wp(X)$ je subbází nějaké topologie na X.

Podobně můžeme mluvit i o *bázi okolí* nějakého bodu x prostoru $(X, \mathscr{T})$, čímž myslíme libovolnou podmnožinu $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}(x)$ takovou, že pro všechna okolí $U \in \mathscr{T}(x)$ existuje $V \in \mathscr{B}$ splňující $V \subseteq U$. Například v libovolném metrickém prostoru má každý bod x spočetnou bázi okolí tvořenou koulemi o poloměru $1/n$, pro $n \in \mathbb{N}$, se středem v x.

Máme-li na množině X definovány dvě topologie $\mathscr{T}_1$ a $\mathscr{T}_2$ splňující $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, říkáme, že $\mathscr{T}_1$ je *hrubší* (*slabší*, coarser) než $\mathscr{T}_2$ a že $\mathscr{T}_2$ je *jemnější* (*silnější*, finer) než $\mathscr{T}_1$.

Tak jako v metrických prostorech, můžeme i v topologických prostorech mluvit o konvergentních posloupnostech. Říkáme, že posloupnost $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ bodů prostoru $(X, \mathscr{T})$ *konverguje* k bodu $x \in X$, jestliže

$$\forall A \in \mathscr{T}(x)\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall i > n\colon x_i \in A,$$

tedy pro každé okolí bodu x existuje index, od kterého již všechny body posloupnosti leží v tomto okolí.

CVIČENÍ 1.15. Charakterizujte konvergentní posloupnosti v prostorech z příkladu 1.2.

PŘÍKLAD 1.16. Ukážeme si, že předuspořádané množiny jsou ve skutečnosti speciálním případem topologických prostorů. Přesněji, předuspořádané množiny odpovídají právě topologickým prostorům $(X, \mathscr{T})$, kde množina $\mathscr{T}$ je uzavřená na libovolné průniky. Snadno se nahlédne, že tato podmínka na $\mathscr{T}$ je ekvivalentní požadavku, aby každý bod měl nejmenší okolí. Všimněte si, že tuto podmínku splňuje diskrétní, indiskrétní i Sierpinského prostor.

Na předuspořádané množině $(X, \leq)$ můžeme topologii definovat tak, že za otevřené prohlásíme právě všechny nahoru uzavřené množiny, tedy množiny $A \subseteq X$ splňující podmínku $y \geq x \in A \implies y \in A$. Opačně, je-li $\mathscr{T}$ topologie na X uzavřená na libovolné průniky, můžeme zavést na X předuspořádání předpisem $x \leq y \iff \mathscr{T}(x) \subseteq \mathscr{T}(y)$, tedy bod x je menší nebo roven bodu y, jestliže nejmenší okolí x obsahuje nejmenší okolí y.

CVIČENÍ 1.17.

(1) Ukažte, že konstrukce uvedené v předchozím příkladu definují vzájemně inverzní bijekce mezi množinou všech topologií na X uzavřených na libovolné průniky a množinou všech předuspořádání na X.
(2) Charakterizujte konvergentní posloupnosti v topologickém prostoru odpovídajícím předuspořádané množině $(X, \leq)$.