

## Písemná práce z kombinatoriky, 14. prosince 2023, varianta A

Jméno:

UČO:

Nezapomeňte vždy zapsat i úvahu, kterou jste k výsledku došli. Jednoznačně vyznačte, co je výsledek (nejlépe v odpovědi). Výsledky můžete zapisovat jako algebraické výrazy obsahující kombinační čísla či faktoriály, není nutné jejich úplné vyčíslení.

1. Označme  $a_n$  počet způsobů, jak je možné obdélníkový chodník o rozměrech  $3 \times n$  vydláždit  $n$  obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech  $3 \times 1$ . Nalezněte rekurentní vztah pro výpočet členů posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  pomocí předchozích členů. Vypočtete  $a_{11}$ .
2. Rekurentní posloupnost  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je dána svými počátečními hodnotami  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = 2$ , a rekurentním vztahem  $b_{n+1} = 8b_n - 15b_{n-1}$  platným pro každé přirozené číslo  $n$ . Nalezněte explicitní vyjádření členu  $b_n$  této posloupnosti, tj. vyjádření, ve kterém nebudou vystupovat jiné členy této posloupnosti (jedinou proměnnou bude  $n$ ).
3. Tvoříme anagramy ze slova AAAABBBBCCCC, tedy slova složená ze čtyř písmen A, čtyř písmen B a čtyř písmen C.
  - (a) Kolik anagramů lze z tohoto slova sestavit?
  - (b) V kolika z nich nejsou žádná čtyři stejná písmena těsně vedle sebe? (Tuto podmínku splňuje například anagram AAABBBCCABC, ale nesplňuje ji například anagram ABCCCCABABAB.)

**Písemná práce z kombinatoriky, 14. prosince 2023, varianta B**

**Jméno:**

**UČO:**

Nezapomeňte vždy zapsat i úvahu, kterou jste k výsledku došli. Jednoznačně vyznačte, co je výsledek (nejlépe v odpovědi). Výsledky můžete zapisovat jako algebraické výrazy obsahující kombinační čísla či faktoriály, není nutné jejich úplné vyčíslení.

1. Označme  $a_n$  počet způsobů, jak je možné obdélníkový chodník o rozměrech  $4 \times n$  vydláždit  $n$  obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech  $4 \times 1$ . Nalezněte rekurentní vztah pro výpočet členů posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  pomocí předchozích členů. Vypočtěte  $a_{13}$ .
2. Rekurentní posloupnost  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  je dána svými počátečními hodnotami  $b_0 = -1$ ,  $b_1 = 0$ , a rekurentním vztahem  $b_{n+1} = 7b_n - 12b_{n-1}$  platným pro každé přirozené číslo  $n$ . Nalezněte explicitní vyjádření členu  $b_n$  této posloupnosti, tj. vyjádření, ve kterém nebudou vystupovat jiné členy této posloupnosti (jedinou proměnnou bude  $n$ ).
3. Tvoříme anagramy ze slova AAABBBCCCD, tedy slova složená ze tří písmen A, tří písmen B, tří písmen C a tří písmen D.
  - (a) Kolik anagramů lze z tohoto slova sestavit?
  - (b) V kolika z nich nejsou žádná tři stejná písmena těsně vedle sebe? (Tuto podmínku splňuje například anagram AABCCDDABCD, ale nesplňuje ji například anagram ABCCDABDABD.)