Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X), \cap)$ a $(\mathcal{P}(X), \cup)$ jsou polosvazy.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X), \cap)$ a $(\mathcal{P}(X), \cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X), \cap)$ a $(\mathcal{P}(X), \cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

Poznámka. Připomeňme, že podgrupoidem grupoidu $(G, \cdot)$ rozumíme libovolnou podmnožinu H množiny G takovou, že pro každé $a, b \in H$ je $a \cdot b \in H$.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G,\cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G,\cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X),\cap)$ a $(\mathcal{P}(X),\cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

Poznámka. Připomeňme, že podgrupoidem grupoidu $(G,\cdot)$ rozumíme libovolnou podmnožinu H množiny G takovou, že pro každé $a, b \in H$ je $a \cdot b \in H$. Největším (vzhledem k inkluzi) podgrupoidem grupoidu $(G,\cdot)$ je G, nejmenším $\emptyset$.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X), \cap)$ a $(\mathcal{P}(X), \cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

Poznámka. Připomeňme, že podgrupoidem grupoidu $(G, \cdot)$ rozumíme libovolnou podmnožinu H množiny G takovou, že pro každé $a, b \in H$ je $a \cdot b \in H$. Největším (vzhledem k inkluzi) podgrupoidem grupoidu $(G, \cdot)$ je G, nejmenším $\emptyset$. Zřejmě je možné operaci $\cdot$ zúžit na H, čímž dostaneme grupoid $(H, \cdot)$.

Polosvazy

Definice. Prvek x grupoidu $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \cdot x = x$. Grupoid $(G, \cdot)$ se nazývá idempotentní, jestliže každý prvek $x \in G$ je idempotentní.

Definice. Komutativní pologrupa, jejíž každý prvek je idempotentní, se nazývá polosvaz.

Příklad. Pro libovolnou množinu X budeme (i v dalším textu) symbolem $\mathcal{P}(X)$ označovat množinu všech podmnožin množiny X. Pak $(\mathcal{P}(X), \cap)$ a $(\mathcal{P}(X), \cup)$ jsou polosvazy.

Příklad. Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ spolu s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší společný násobek) tvoří polosvaz.

Poznámka. Připomeňme, že podgrupoidem grupoidu $(G, \cdot)$ rozumíme libovolnou podmnožinu H množiny G takovou, že pro každé $a, b \in H$ je $a \cdot b \in H$. Největším (vzhledem k inkluzi) podgrupoidem grupoidu $(G, \cdot)$ je G, nejmenším $\emptyset$. Zřejmě je možné operaci $\cdot$ zúžit na H, čímž dostaneme grupoid $(H, \cdot)$. Je jasné, že každý podgrupoid libovolného polosvazu je také polosvaz.

<u>Věta 1.1.</u> *Nechť* $(G, \cdot)$ *je komutativní pologrupa.*

<u>Věta 1.1.</u> Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy $(G, \cdot)$, který je polosvazem.

Věta 1.1. *Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy $(G, \cdot)$, který je polosvazem.*

Důkaz. Jsou-li x a y idempotentní, pak $x \cdot x = x$ a $y \cdot y = y$, odkud plyne $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y$.

Věta 1.1. *Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy $(G, \cdot)$, který je polosvazem.*

Důkaz. Jsou-li x a y idempotentní, pak $x \cdot x = x$ a $y \cdot y = y$, odkud plyne $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y$. Jde tedy skutečně o podgrupoid, zbytek tvrzení je zřejmý.

Věta 1.1. *Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy $(G, \cdot)$, který je polosvazem.*

Důkaz. Jsou-li x a y idempotentní, pak $x \cdot x = x$ a $y \cdot y = y$, odkud plyne $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y$. Jde tedy skutečně o podgrupoid, zbytek tvrzení je zřejmý.

Poznámka. Připomeňme, že v uspořádané množině $(G, \leq)$ nazýváme prvek $x \in G$ horní závorou prvků $a, b \in G$, jestliže $a \leq x$, $b \leq x$.

Věta 1.1. *Nechť $(G, \cdot)$ je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy $(G, \cdot)$, který je polosvazem.*

Důkaz. Jsou-li x a y idempotentní, pak $x \cdot x = x$ a $y \cdot y = y$, odkud plyne $(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x \cdot y$. Jde tedy skutečně o podgrupoid, zbytek tvrzení je zřejmý.

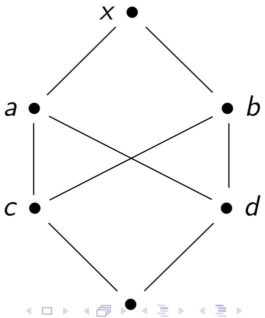
Poznámka. Připomeňme, že v uspořádané množině $(G, \leq)$ nazýváme prvek $x \in G$ horní závorou prvků $a, b \in G$, jestliže $a \leq x$, $b \leq x$. Jestliže existuje nejmenší ze všech horních závor prvků a, b, nazýváme ji jejich supremem, které značíme $\sup\{a, b\}$ nebo $a \vee b$.

Věta 1.1. *Nechť* $(G,\cdot)$ *je komutativní pologrupa. Pak množina všech jejích idempotentních prvků tvoří podgrupoid pologrupy* $(G,\cdot)$, *který je polosvazem.*

Důkaz. Jsou-li x a y idempotentní, pak $x\cdot x = x$ a $y \cdot y = y$, odkud plyne $(x\cdot y)\cdot(x\cdot y) = x\cdot x\cdot y\cdot y = x\cdot y$. Jde tedy skutečně o podgrupoid, zbytek tvrzení je zřejmý.

Poznámka. Připomeňme, že v uspořádané množině $(G,\leq)$ nazýváme prvek $x\in G$ horní závorou prvků $a,b\in G$, jestliže $a\leq x$, $b\leq x$. Jestliže existuje nejmenší ze všech horních závor prvků a,b, nazýváme ji jejich supremem, které značíme $\sup\{a,b\}$ nebo $a\vee b$.

Příklad. V uvedené uspořádané množině je supremem prvků a,b prvek x, zatímco prvky c,d supremum nemají: mezi jejich třemi horními závorami x,a,b neexistuje nejmenší.



Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům* $a, b \in G$ *existuje supremum* $a \vee b$.

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům* $a, b \in G$ *existuje supremum* $a \vee b$. *Pak* $(G, \vee)$ *je polosvaz.*

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak $(G, \vee)$ je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům* $a, b \in G$ *existuje supremum* $a \vee b$*. Pak* $(G, \vee)$ *je polosvaz. Navíc pro každé* $a, b \in G$ *platí*

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Důkaz. Komutativita i idempotentnost je zřejmá, ekvivalence obou podmínek též.

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. *Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak $(G, \vee)$ je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí*

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b.$$

Důkaz. Komutativita i idempotentnost je zřejmá, ekvivalence obou podmínek též. Pro libovolné $a, b, c \in G$ jistě platí $(a \vee b) \vee c \geq c$, $(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a$, podobně $(a \vee b) \vee c \geq b$.

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak $(G, \vee)$ je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Důkaz. Komutativita i idempotentnost je zřejmá, ekvivalence obou podmínek též. Pro libovolné $a, b, c \in G$ jistě platí $(a \vee b) \vee c \geq c$, $(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a$, podobně $(a \vee b) \vee c \geq b$. Je tedy $(a \vee b) \vee c$ horní závora prvků b, c, proto $(a \vee b) \vee c \geq b \vee c$.

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. *Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak $(G, \vee)$ je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí*

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Důkaz. Komutativita i idempotentnost je zřejmá, ekvivalence obou podmínek též. Pro libovolné $a, b, c \in G$ jistě platí $(a \vee b) \vee c \geq c$, $(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a$, podobně $(a \vee b) \vee c \geq b$. Je tedy $(a \vee b) \vee c$ horní závora prvků b, c, proto $(a \vee b) \vee c \geq b \vee c$. Je tudíž $(a \vee b) \vee c$ horní závora prvků $a, b \vee c$, proto $(a \vee b) \vee c \geq a \vee (b \vee c)$.

Z uspořádané množiny, jejíž každé dva prvky mají supremum, lze vytvořit polosvaz

Věta 1.2. Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž k libovolným dvěma prvkům $a, b \in G$ existuje supremum $a \vee b$. Pak $(G, \vee)$ je polosvaz. Navíc pro každé $a, b \in G$ platí

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b.$$

Důkaz. Komutativita i idempotentnost je zřejmá, ekvivalence obou podmínek též. Pro libovolné $a, b, c \in G$ jistě platí $(a \vee b) \vee c \geq c$, $(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a$, podobně $(a \vee b) \vee c \geq b$. Je tedy $(a \vee b) \vee c$ horní závora prvků b, c, proto $(a \vee b) \vee c \geq b \vee c$. Je tudíž $(a \vee b) \vee c$ horní závora prvků $a, b \vee c$, proto $(a \vee b) \vee c \geq a \vee (b \vee c)$.
Analogicky opačná nerovnost, z antisymetrie asociativita.

Z polosvazu lze vytvořit uspořádanou množinu

Věta 1.3. *Nechť* $(G, \cdot)$ *je polosvaz.*

Z polosvazu lze vytvořit uspořádanou množinu

Věta 1.3. Nechť $(G, \cdot)$ je polosvaz. Potom relace $\leq$, daná vztahem

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \cdot b = b$$

pro každé $a, b \in G$, je uspořádání na G, ve kterém pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v $(G, \leq)$.

Z polosvazu lze vytvořit uspořádanou množinu

Věta 1.3. *Nechť* $(G, \cdot)$ *je polosvaz. Potom relace* $\leq$*, daná vztahem*

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \cdot b = b$$

pro každé $a, b \in G$*, je uspořádání na* G*, ve kterém pro každé* $a, b \in G$ *je* $a \cdot b$ *supremum prvků* a, b *v* $(G, \leq)$*.*

Důkaz. Pro každé $a, b, c \in G$ platí

$$\begin{aligned} a \cdot a = a \quad &\Longrightarrow \quad a \leq a, \\ a \leq b,\ b \leq a \quad &\Longrightarrow \quad a = b \cdot a = a \cdot b = b, \end{aligned}$$

a tedy je $\leq$ reflexivní a antisymetrická relace.

Z polosvazu lze vytvořit uspořádanou množinu

Věta 1.3. Nechť $(G,\cdot)$ je polosvaz. Potom relace $\leq$, daná vztahem

$$a \leq b \iff a \cdot b = b$$

pro každé $a, b \in G$, je uspořádání na G, ve kterém pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v $(G,\leq)$.

Důkaz. Pro každé $a, b, c \in G$ platí

$$\begin{aligned} a \cdot a = a \quad &\implies \quad a \leq a, \\ a \leq b,\ b \leq a \quad &\implies \quad a = b \cdot a = a \cdot b = b, \end{aligned}$$

a tedy je $\leq$ reflexivní a antisymetrická relace. Rovněž platí

$$\begin{aligned} a \leq b,\ b \leq c \quad &\implies \quad a \cdot b = b,\ b \cdot c = c \\ &\implies \quad a \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c \\ &\implies \quad a \leq c, \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali tranzitivitu.

Z polosvazu lze vytvořit uspořádanou množinu

Věta 1.3. *Nechť* $(G, \cdot)$ *je polosvaz. Potom relace* $\leq$, *daná vztahem*

$$a \leq b \iff a \cdot b = b$$

pro každé $a, b \in G$, *je uspořádání na* G, *ve kterém pro každé* $a, b \in G$ *je* $a \cdot b$ *supremum prvků* a, b *v* $(G, \leq)$.

Důkaz. Pro každé $a, b, c \in G$ platí

$$\begin{aligned} a \cdot a = a \quad &\Longrightarrow \quad a \leq a, \\ a \leq b,\ b \leq a \quad &\Longrightarrow \quad a = b \cdot a = a \cdot b = b, \end{aligned}$$

a tedy je $\leq$ reflexivní a antisymetrická relace. Rovněž platí

$$\begin{aligned} a \leq b,\ b \leq c \quad &\Longrightarrow \quad a \cdot b = b,\ b \cdot c = c \\ &\Longrightarrow \quad a \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c \\ &\Longrightarrow \quad a \leq c, \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali tranzitivitu. Je tedy $\leq$ uspořádání na G.

Zbývá ukázat, že pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v uspořádané množině $(G, \leq)$.

Zbývá ukázat, že pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v uspořádané množině $(G, \leq)$. Protože

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot a) \cdot b = a \cdot b, \\ b \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = a \cdot b, \end{aligned}$$

platí $a \leq a \cdot b$, $b \leq a \cdot b$.

Zbývá ukázat, že pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v uspořádané množině $(G, \leq)$. Protože

$$
\begin{aligned}
a \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot a) \cdot b = a \cdot b, \\
b \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = a \cdot b,
\end{aligned}
$$

platí $a \leq a \cdot b$, $b \leq a \cdot b$. Nechť c je libovolná horní závora prvků a, b v $(G, \leq)$, tedy $a \leq c$, $b \leq c$.

Zbývá ukázat, že pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v uspořádané množině $(G, \leq)$. Protože

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot a) \cdot b = a \cdot b, \\ b \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = a \cdot b, \end{aligned}$$

platí $a \leq a \cdot b$, $b \leq a \cdot b$. Nechť c je libovolná horní závora prvků a, b v $(G, \leq)$, tedy $a \leq c$, $b \leq c$. Pak platí $a \cdot c = c$, $b \cdot c = c$, odkud

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c = c,$$

tedy $a \cdot b \leq c$, je tedy $a \cdot b$ supremum prvků a, b v $(G, \leq)$.

Zbývá ukázat, že pro každé $a, b \in G$ je $a \cdot b$ supremum prvků a, b v uspořádané množině $(G, \leq)$. Protože

$$\begin{aligned} a \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot a) \cdot b = a \cdot b, \\ b \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = a \cdot b, \end{aligned}$$

platí $a \leq a \cdot b$, $b \leq a \cdot b$. Nechť c je libovolná horní závora prvků a, b v $(G, \leq)$, tedy $a \leq c$, $b \leq c$. Pak platí $a \cdot c = c$, $b \cdot c = c$, odkud

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c = c,$$

tedy $a \cdot b \leq c$, je tedy $a \cdot b$ supremum prvků a, b v $(G, \leq)$.

Důsledek. *Polosvazy jsou totéž co uspořádané množiny, v nichž ke každým dvěma prvkům existuje supremum.*

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina.

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci $\preceq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \preceq b \iff b \leq a,$$

pak je $(G, \preceq)$ opět uspořádaná množina,

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci $\preceq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \preceq b \Longleftrightarrow b \leq a,$$

pak je $(G, \preceq)$ opět uspořádaná množina, přičemž supremum (resp. infimum) libovolné množiny $A \subseteq G$ v $(G, \leq)$ se stane infimem (resp. supremem) množiny A v $(G, \preceq)$.

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci $\preceq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \preceq b \Longleftrightarrow b \leq a,$$

pak je $(G, \preceq)$ opět uspořádaná množina, přičemž supremum (resp. infimum) libovolné množiny $A \subseteq G$ v $(G, \leq)$ se stane infimem (resp. supremem) množiny A v $(G, \preceq)$.
Podobně největší (resp. nejmenší) prvek v $(G, \leq)$ se stane nejmenším (resp. největším) prvkem v $(G, \preceq)$,

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci $\preceq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \preceq b \Longleftrightarrow b \leq a,$$

pak je $(G, \preceq)$ opět uspořádaná množina, přičemž supremum (resp. infimum) libovolné množiny $A \subseteq G$ v $(G, \leq)$ se stane infimem (resp. supremem) množiny A v $(G, \preceq)$.
Podobně největší (resp. nejmenší) prvek v $(G, \leq)$ se stane nejmenším (resp. největším) prvkem v $(G, \preceq)$, maximální (resp. minimální) prvek v $(G, \leq)$ se stane minimálním (resp. maximálním) prvkem v $(G, \preceq)$.

Princip duality uspořádaných množin

Princip duality: Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Definujeme-li na G novou relaci $\preceq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe

$$a \preceq b \Longleftrightarrow b \leq a,$$

pak je $(G, \preceq)$ opět uspořádaná množina, přičemž supremum (resp. infimum) libovolné množiny $A \subseteq G$ v $(G, \leq)$ se stane infimem (resp. supremem) množiny A v $(G, \preceq)$.
Podobně největší (resp. nejmenší) prvek v $(G, \leq)$ se stane nejmenším (resp. největším) prvkem v $(G, \preceq)$, maximální (resp. minimální) prvek v $(G, \leq)$ se stane minimálním (resp. maximálním) prvkem v $(G, \preceq)$.

Důsledek. *Polosvazy jsou totéž co uspořádané množiny, v nichž ke každým dvěma prvkům existuje infimum.*

Svazy

Definice. Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá svaz.

Svazy

Definice. Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá svaz.

Příklad. Každý řetězec (neboli lineárně uspořádaná množina, tj. uspořádaná množina, v níž jsou každé dva prvky srovnatelné) je svaz: supremem daných dvou prvků je ten větší z nich, jejich infimem je ten menší.

Svazy

Definice. Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá svaz.

Příklad. Každý řetězec (neboli lineárně uspořádaná množina, tj. uspořádaná množina, v níž jsou každé dva prvky srovnatelné) je svaz: supremem daných dvou prvků je ten větší z nich, jejich infimem je ten menší.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ svaz: supremem libovolných dvou podmnožin množiny X je jejich sjednocení, jejich infimem je jejich průnik.

Svazy

Definice. Uspořádaná množina, v níž ke každým dvěma prvkům existuje supremum i infimum, se nazývá svaz.

Příklad. Každý řetězec (neboli lineárně uspořádaná množina, tj. uspořádaná množina, v níž jsou každé dva prvky srovnatelné) je svaz: supremem daných dvou prvků je ten větší z nich, jejich infimem je ten menší.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ svaz: supremem libovolných dvou podmnožin množiny X je jejich sjednocení, jejich infimem je jejich průnik.

Příklad. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je uspořádána relací dělitelnosti, přitom $(\mathbb{N}, |)$ je svaz: pro libovolná dvě přirozená čísla je jejich supremem jejich nejmenší společný násobek a jejich infimem je jejich největší společný dělitel.

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je svaz.*

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je svaz. Pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *označme jejich supremum symbolem* $a \vee b$ *a jejich infimum symbolem* $a \wedge b$.

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je svaz. Pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *označme jejich supremum symbolem* $a \vee b$ *a jejich infimum symbolem* $a \wedge b$. *Pak* $(G, \vee)$ *a* $(G, \wedge)$ *jsou polosvazy a obě operace jsou spolu svázány tzv. absorpčními zákony: pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí*

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je svaz. Pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *označme jejich supremum symbolem* $a \vee b$ *a jejich infimum symbolem* $a \wedge b$*. Pak* $(G, \vee)$ *a* $(G, \wedge)$ *jsou polosvazy a obě operace jsou spolu svázány tzv. absorpčními zákony: pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí*

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Kromě toho pro každé prvky $a, b \in G$ *platí*

$$a \wedge b = a \iff a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť $(G, \leq)$ je svaz. Pro libovolné prvky $a, b \in G$ označme jejich supremum symbolem $a \vee b$ a jejich infimum symbolem $a \wedge b$. Pak $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$ jsou polosvazy a obě operace jsou spolu svázány tzv. absorpčními zákony: pro každé prvky $a, b \in G$ platí*

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Kromě toho pro každé prvky $a, b \in G$ platí

$$a \wedge b = a \iff a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Důkaz. To, že $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$ jsou polosvazy, plyne z věty 1.2 a principu duality; rovněž tak ekvivalentnost uvedených podmínek.

Svaz jako množina se dvěma operacemi

Věta 2.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je svaz. Pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *označme jejich supremum symbolem* $a \vee b$ *a jejich infimum symbolem* $a \wedge b$. *Pak* $(G, \vee)$ *a* $(G, \wedge)$ *jsou polosvazy a obě operace jsou spolu svázány tzv. absorpčními zákony: pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí*

$$a \vee (b \wedge a) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Kromě toho pro každé prvky $a, b \in G$ *platí*

$$a \wedge b = a \iff a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Důkaz. To, že $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$ jsou polosvazy, plyne z věty 1.2 a principu duality; rovněž tak ekvivalentnost uvedených podmínek. Absorpční zákony jsou zřejmé.

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony.*

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

<u>Věta 2.2.</u> Nechť $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,
2. *definujeme-li na* G *relaci* $\leq$ *takto: pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,
2. *definujeme-li na* G *relaci* $\leq$ *takto: pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

pak je $\leq$ *uspořádání na* G *takové, že* $(G, \leq)$ *je svaz, v němž pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *je prvek* $a \vee b$ *jejich supremum a prvek* $a \wedge b$ *jejich infimum.*

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$*,*
2. *definujeme-li na* G *relaci* $\leq$ *takto: pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

pak je $\leq$ *uspořádání na* G *takové, že* $(G, \leq)$ *je svaz, v němž pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *je prvek* $a \vee b$ *jejich supremum a prvek* $a \wedge b$ *jejich infimum.*

Důkaz. Nechť pro prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a$.

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,
2. *definujeme-li na* G *relaci* $\leq$ *takto: pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

pak je $\leq$ *uspořádání na* G *takové, že* $(G, \leq)$ *je svaz, v němž pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *je prvek* $a \vee b$ *jejich supremum a prvek* $a \wedge b$ *jejich infimum.*

Důkaz. Nechť pro prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a$. Pak $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \vee (a \wedge b) = b$ dle absorpčního zákona.

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

Věta 2.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí*

1. *pro každé prvky* $a, b \in G$ *platí* $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,
2. *definujeme-li na* G *relaci* $\leq$ *takto: pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

pak je $\leq$ *uspořádání na* G *takové, že* $(G, \leq)$ *je svaz, v němž pro libovolné prvky* $a, b \in G$ *je prvek* $a \vee b$ *jejich supremum a prvek* $a \wedge b$ *jejich infimum.*

Důkaz. Nechť pro prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a$. Pak $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \vee (a \wedge b) = b$ dle absorpčního zákona. Opačná implikace analogicky.

Co musí splnit dvě operace na množině, aby vznikl svaz?

<u>Věta 2.2.</u> Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je množina se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, které jsou spolu svázány absorpčními zákony. Pak platí

1. *pro každé prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a \iff a \vee b = b$,*
2. *definujeme-li na G relaci $\leq$ takto: pro libovolné prvky $a, b \in G$ klademe*

$$a \leq b \iff a \vee b = b,$$

pak je $\leq$ uspořádání na G takové, že $(G, \leq)$ je svaz, v němž pro libovolné prvky $a, b \in G$ je prvek $a \vee b$ jejich supremum a prvek $a \wedge b$ jejich infimum.

<u>Důkaz.</u> Nechť pro prvky $a, b \in G$ platí $a \wedge b = a$. Pak $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \vee (a \wedge b) = b$ dle absorpčního zákona. Opačná implikace analogicky. Ostatní plyne z věty 1.3 a principu duality.

Princip duality svazů

Poznámka. Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony.

Princip duality svazů

Poznámka. Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury $(G, \vee, \wedge)$ budeme také nazývat svazy.

Princip duality svazů

<u>Poznámka.</u> Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury $(G, \vee, \wedge)$ budeme také nazývat svazy.

Princip duality: Je-li $(G, \vee, \wedge)$ svaz, pak i $(G, \wedge, \vee)$ je svaz (tzv. svaz duální k původnímu svazu).

Princip duality svazů

Poznámka. Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury $(G, \vee, \wedge)$ budeme také nazývat svazy.

Princip duality: Je-li $(G, \vee, \wedge)$ svaz, pak i $(G, \wedge, \vee)$ je svaz (tzv. svaz duální k původnímu svazu). Obecně, jestliže v nějakém platném tvrzení o svazech systematicky zaměníme supremum $\leftrightarrow$ infimum, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\leq \leftrightarrow \geq$, dostaneme opět platné tvrzení o svazech.

Princip duality svazů

Poznámka. Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury $(G, \vee, \wedge)$ budeme také nazývat svazy.

Princip duality: Je-li $(G, \vee, \wedge)$ svaz, pak i $(G, \wedge, \vee)$ je svaz (tzv. svaz duální k původnímu svazu). Obecně, jestliže v nějakém platném tvrzení o svazech systematicky zaměníme supremum $\leftrightarrow$ infimum, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\leq \leftrightarrow \geq$, dostaneme opět platné tvrzení o svazech.

Poznámka. Protože není nutné zdůrazňovat, zda máme na mysli svaz jako uspořádanou množinu nebo jako algebraickou strukturu se dvěma operacemi, nebudeme dále, nebude-li to z nějakých důvodů vhodné nebo dokonce nevyhnutelné, uspořádání či operace vyznačovat.

Princip duality svazů

Poznámka. Z dokázaných vět vyplývá, že svazy jsou totéž co algebraické struktury $(G, \vee, \wedge)$ se dvěma idempotentními, asociativními a komutativními operacemi, svázanými spolu absorpčními zákony. Proto i tyto struktury $(G, \vee, \wedge)$ budeme také nazývat svazy.

Princip duality: Je-li $(G, \vee, \wedge)$ svaz, pak i $(G, \wedge, \vee)$ je svaz (tzv. svaz duální k původnímu svazu). Obecně, jestliže v nějakém platném tvrzení o svazech systematicky zaměníme supremum $\leftrightarrow$ infimum, $\vee \leftrightarrow \wedge$, $\leq \leftrightarrow \geq$, dostaneme opět platné tvrzení o svazech.

Poznámka. Protože není nutné zdůrazňovat, zda máme na mysli svaz jako uspořádanou množinu nebo jako algebraickou strukturu se dvěma operacemi, nebudeme dále, nebude-li to z nějakých důvodů vhodné nebo dokonce nevyhnutelné, uspořádání či operace vyznačovat. Budeme tedy místo o svazu $(G, \leq)$ či svazu $(G, \vee, \wedge)$ jednoduše psát o svazu G.

Distributivní a modulární nerovnosti

Věta 2.3. *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Distributivní a modulární nerovnosti

Věta 2.3. *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \ \geq \ a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \ \leq \ a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Distributivní a modulární nerovnosti

Věta 2.3. *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Důkaz. Jistě platí $a \vee b \geq a$, $a \vee c \geq a$, tedy a je dolní závorou prvků $a \vee b$, $a \vee c$, proto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a$.

Distributivní a modulární nerovnosti

<u>Věta 2.3.</u> V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

<u>Důkaz.</u> Jistě platí $a \vee b \geq a$, $a \vee c \geq a$, tedy a je dolní závorou prvků $a \vee b$, $a \vee c$, proto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a$. Platí $a \vee b \geq b \geq b \wedge c$, $a \vee c \geq c \geq b \wedge c$, odkud podobně $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq b \wedge c$.

Distributivní a modulární nerovnosti

Věta 2.3. *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Důkaz. Jistě platí $a \vee b \geq a$, $a \vee c \geq a$, tedy a je dolní závorou prvků $a \vee b$, $a \vee c$, proto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a$. Platí $a \vee b \geq b \geq b \wedge c$, $a \vee c \geq c \geq b \wedge c$, odkud podobně $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq b \wedge c$. Proto je $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ horní závorou prvků a, $b \wedge c$ a dostáváme první distributivní nerovnost.

Distributivní a modulární nerovnosti

Věta 2.3. *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Důkaz. Jistě platí $a \vee b \geq a$, $a \vee c \geq a$, tedy a je dolní závorou prvků $a \vee b$, $a \vee c$, proto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a$. Platí $a \vee b \geq b \geq b \wedge c$, $a \vee c \geq c \geq b \wedge c$, odkud podobně $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq b \wedge c$. Proto je $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ horní závorou prvků a, $b \wedge c$ a dostáváme první distributivní nerovnost. Druhou lze principem duality odvodit z první.

Distributivní a modulární nerovnosti

<u>*Věta 2.3.*</u> *V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí tzv. distributivní nerovnosti*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Je-li navíc $c \leq a$, platí tzv. modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

<u>*Důkaz.*</u> Jistě platí $a \vee b \geq a$, $a \vee c \geq a$, tedy a je dolní závorou prvků $a \vee b$, $a \vee c$, proto $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a$. Platí $a \vee b \geq b \geq b \wedge c$, $a \vee c \geq c \geq b \wedge c$, odkud podobně $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq b \wedge c$. Proto je $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ horní závorou prvků a, $b \wedge c$ a dostáváme první distributivní nerovnost. Druhou lze principem duality odvodit z první.
Je-li navíc $c \leq a$, platí $a \wedge c = c$, proto modulární nerovnost plyne z druhé distributivní nerovnosti.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \dots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \dots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \dots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$. Pak $c \geq b$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$. Pak $c \geq b$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Současně $c \geq a_n$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$. Pak $c \geq b$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Současně $c \geq a_n$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Nechť d je libovolná horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. *Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.*

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$. Pak $c \geq b$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Současně $c \geq a_n$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Nechť d je libovolná horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pak je d horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, a tedy $d \geq b$.

Suprema a infima konečných podmnožin svazu

Poznámka. Protože jsou obě operace $\vee$ a $\wedge$ ve svazu komutativní a asociativní, nezáleží v zápise $a_1 \vee \cdots \vee a_n$, resp. $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ na pořadí ani na uzávorkování.

Věta 2.4. Nechť G je svaz, $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné prvky $a_1, \ldots, a_n \in G$ platí, že $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ je supremum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ a $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ je infimum množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Důkaz. Dokažme indukcí vzhledem k n tvrzení o supremech; pak tvrzení o infimech dostaneme z duality.

Tvrzení je pro $n = 1$ zřejmé, pro $n = 2$ jde o definici operace $\vee$. Nechť $n > 2$ a pro $n - 1$ již bylo tvrzení dokázáno. Označme $b = a_1 \vee \cdots \vee a_{n-1}$ a $c = b \vee a_n$. Pak $c \geq b$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Současně $c \geq a_n$, a tedy c je horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Nechť d je libovolná horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Pak je d horní závora množiny $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, a tedy $d \geq b$. Současně $d \geq a_n$, a proto $d \geq b \vee a_n = c$.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Poznámka. A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, právě když je A podgrupoid obou grupoidů $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Poznámka. A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, právě když je A podgrupoid obou grupoidů $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$.

Příklad. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem, prázdná množina je podsvazem libovolného svazu, každý svaz je svým podsvazem.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Poznámka. A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, právě když je A podgrupoid obou grupoidů $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$.

Příklad. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem, prázdná množina je podsvazem libovolného svazu, každý svaz je svým podsvazem.

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina.

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Poznámka. A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, právě když je A podgrupoid obou grupoidů $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$.

Příklad. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem, prázdná množina je podsvazem libovolného svazu, každý svaz je svým podsvazem.

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Řekneme, že A je ideál svazu G, jestliže je A podsvazem svazu G, který navíc splňuje podmínku: pro každé $a \in A$ a každé $x \in G$ platí

$$x \leq a \Longrightarrow x \in A.$$

Podsvazy, ideály, filtry

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je svaz, A podmnožina jeho nosné množiny G. Řekneme, že A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $a \vee b \in A$ a současně $a \wedge b \in A$.

Poznámka. A je podsvaz svazu $(G, \vee, \wedge)$, právě když je A podgrupoid obou grupoidů $(G, \vee)$ a $(G, \wedge)$.

Příklad. Každá jednoprvková podmnožina svazu je jeho podsvazem, prázdná množina je podsvazem libovolného svazu, každý svaz je svým podsvazem.

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Řekneme, že A je ideál svazu G, jestliže je A podsvazem svazu G, který navíc splňuje podmínku: pro každé $a \in A$ a každé $x \in G$ platí

$$x \leq a \Longrightarrow x \in A.$$

Duálně, řekneme, že A je filtr svazu G, jestliže je A podsvazem svazu G, který navíc splňuje podmínku: pro každé $a \in A$ a každé $x \in G$ platí

$$x \geq a \Longrightarrow x \in A.$$

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a,

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$. Odtud $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$, a proto je A podsvaz svazu G.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$. Odtud $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$, a proto je A podsvaz svazu G. Předpokládejme navíc, že pro každé $i \in I$ je A_i dokonce ideál svazu G.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$. Odtud $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$, a proto je A podsvaz svazu G.
Předpokládejme navíc, že pro každé $i \in I$ je A_i dokonce ideál svazu G. Mějme $a \in A$, $x \in G$, $x \leq a$.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$. Odtud $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$, a proto je A podsvaz svazu G.
Předpokládejme navíc, že pro každé $i \in I$ je A_i dokonce ideál svazu G. Mějme $a \in A$, $x \in G$, $x \leq a$. Pak pro každé $i \in I$ je $a \in A_i$, tedy i $x \in A_i$, tudíž $x \in A$.

Poznámka. Ideál svazu je tedy podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu menší než a, filtr svazu je podsvaz, který s každým svým prvkem a obsahuje i všechny prvky svazu větší než a.

Příklad. Každý svaz je svým ideálem i filtrem. Prázdná množina je ideálem i filtrem libovolného svazu.

Věta 3.1. *Průnik libovolného neprázdného systému podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) daného svazu je opět podsvaz (resp. ideál, resp. filtr) tohoto svazu.*

Důkaz. Nechť $I \neq \emptyset$ a pro každé $i \in I$ je A_i podsvaz svazu G. Označme $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ jejich průnik. Pak pro každé $a, b \in A$ platí $a, b \in A_i$ pro všechna $i \in I$, a tedy $a \vee b \in A_i$, $a \wedge b \in A_i$. Odtud $a \vee b \in A$, $a \wedge b \in A$, a proto je A podsvaz svazu G.
Předpokládejme navíc, že pro každé $i \in I$ je A_i dokonce ideál svazu G. Mějme $a \in A$, $x \in G$, $x \leq a$. Pak pro každé $i \in I$ je $a \in A_i$, tedy i $x \in A_i$, tudíž $x \in A$.
Tvrzení o filtrech nyní plyne z duality.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

<u>Definice.</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A,

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A, vždyť alespoň jeden podsvaz tohoto svazu obsahující množinu A existuje, totiž celý svaz G.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A, vždyť alespoň jeden podsvaz tohoto svazu obsahující množinu A existuje, totiž celý svaz G.

Podobně můžeme definovat ideál $A\downarrow$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech ideálů tohoto svazu obsahujících množinu A.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

<u>*Definice.*</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A, vždyť alespoň jeden podsvaz tohoto svazu obsahující množinu A existuje, totiž celý svaz G.
Podobně můžeme definovat ideál $A{\downarrow}$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech ideálů tohoto svazu obsahujících množinu A. Duálně, filtr $A{\uparrow}$ svazu G generovaný množinou A je průnik všech filtrů tohoto svazu obsahujících množinu A.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A, vždyť alespoň jeden podsvaz tohoto svazu obsahující množinu A existuje, totiž celý svaz G.
Podobně můžeme definovat ideál $A{\downarrow}$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech ideálů tohoto svazu obsahujících množinu A. Duálně, filtr $A{\uparrow}$ svazu G generovaný množinou A je průnik všech filtrů tohoto svazu obsahujících množinu A.
Je-li $A = \{a\}$, píšeme stručně $a{\downarrow}$ místo $\{a\}{\downarrow}$, resp. $a{\uparrow}$ místo $\{a\}{\uparrow}$, a hovoříme o hlavním ideálu, resp. o hlavním filtru, generovaném prvkem a.

Podsvazy (ideály, filtry) generované podmnožinou

Definice. Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Díky předchozí větě můžeme nyní definovat podsvaz $\langle A \rangle$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech podsvazů tohoto svazu obsahujících množinu A, vždyť alespoň jeden podsvaz tohoto svazu obsahující množinu A existuje, totiž celý svaz G.
Podobně můžeme definovat ideál $A\!\downarrow$ svazu G generovaný množinou A jako průnik všech ideálů tohoto svazu obsahujících množinu A. Duálně, filtr $A\!\uparrow$ svazu G generovaný množinou A je průnik všech filtrů tohoto svazu obsahujících množinu A.
Je-li $A = \{a\}$, píšeme stručně $a\!\downarrow$ místo $\{a\}\!\downarrow$, resp. $a\!\uparrow$ místo $\{a\}\!\uparrow$, a hovoříme o hlavním ideálu, resp. o hlavním filtru, generovaném prvkem a.

Poznámka. Pro svaz G a podmnožinu $A \subseteq G$ je podsvaz $\langle A \rangle$ (resp. ideál $A\!\downarrow$, resp. filtr $A\!\uparrow$) generovaný množinou A tím nejmenším (vzhledem k množinové inkluzi) podsvazem (resp. ideálem, resp. filtrem) svazu G ze všech podsvazů (resp. ideálů, resp. filtrů) obsahujících množinu A.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina.*

<u>Věta 3.2.</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A :\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

<u>Věta 3.2.</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A\downarrow$ generovaný množinou A platí

$$A\downarrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \le a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A\uparrow$ generovaný množinou A platí

$$A\uparrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \ge a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

<u>Důkaz.</u> Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A \colon x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A \colon x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \dots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A \colon x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n\}.$$

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A\downarrow$ generovaný množinou A platí*

$$A\downarrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \, x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A\uparrow$ generovaný množinou A platí

$$A\uparrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \, x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \, x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A\downarrow \supseteq B$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \ldots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A:\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A\downarrow$ generovaný množinou A platí*

$$A\downarrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A :\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A\uparrow$ generovaný množinou A platí

$$A\uparrow = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A :\ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A :\ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A\downarrow \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$. Protože $x \wedge y \leq x$, je $x \wedge y \in B$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$. Protože $x \wedge y \leq x$, je $x \wedge y \in B$. Potřebujeme ověřit, že také $x \vee y \in B$.

<u>Věta 3.2.</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

<u>Důkaz.</u> Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \ldots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \ldots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$. Protože $x \wedge y \leq x$, je $x \wedge y \in B$. Potřebujeme ověřit, že také $x \vee y \in B$. Existují $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in A$ tak, že $x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$, $y \leq b_1 \vee \cdots \vee b_m$.

<u>Věta 3.2.</u> Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \geq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n\}.$$

<u>Důkaz.</u> Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \; x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$. Protože $x \wedge y \leq x$, je $x \wedge y \in B$. Potřebujeme ověřit, že také $x \vee y \in B$. Existují $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$ tak, že $x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$, $y \leq b_1 \vee \cdots \vee b_m$. Pak pro $c = (a_1 \vee \cdots \vee a_n) \vee (b_1 \vee \cdots \vee b_m)$ je $x \leq c$, $y \leq c$, odkud $x \vee y \leq c$, proto $x \vee y \in B$.

Věta 3.2. *Nechť G je svaz, $A \subseteq G$ podmnožina. Pro ideál $A{\downarrow}$ generovaný množinou A platí*

$$A{\downarrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n\}.$$

Duálně, pro filtr $A{\uparrow}$ generovaný množinou A platí

$$A{\uparrow} = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \geq a_1 \wedge \dots \wedge a_n\}.$$

Důkaz. Každý ideál svazu G obsahující množinu A musí pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ obsahovat i $a_1 \vee \dots \vee a_n$. Proto obsahuje i množinu

$$B = \{x \in G; \exists n \in \mathbb{N}\, \exists a_1, \dots, a_n \in A : \ x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n\}.$$

Je tedy $A{\downarrow} \supseteq B$. Stačí ověřit, že B je ideál obsahující A. Inkluze $A \subseteq B$ je zřejmá, neboť pro $a \in A$ lze volit $n = 1$ a $a_1 = a$. Jistě B obsahuje s každým svým prvkem i všechny prvky svazu ještě menší. Nechť $x, y \in B$. Protože $x \wedge y \leq x$, je $x \wedge y \in B$. Potřebujeme ověřit, že také $x \vee y \in B$. Existují $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in A$ tak, že $x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n$, $y \leq b_1 \vee \dots \vee b_m$. Pak pro $c = (a_1 \vee \dots \vee a_n) \vee (b_1 \vee \dots \vee b_m)$ je $x \leq c$, $y \leq c$, odkud $x \vee y \leq c$, proto $x \vee y \in B$. Tvrzení o filtrech plyne z duality.

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení.

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Definice. Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení.

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Definice. Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f svazový homomorfismus, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Definice. Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f svazový homomorfismus, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

Řekneme, že f je svazový izomorfismus (neboli izomorfismus svazů), je-li f bijektivní homomorfismus.

Izotonní zobrazení, homomorfismy svazů

Definice. Nechť $(G, \leq)$, $(H, \preceq)$ jsou uspořádané množiny, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f izotonní zobrazení, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí implikace

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \preceq f(b).$$

Řekneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin, je-li f bijekce a obě zobrazení f i f^{-1} jsou izotonní.

Definice. Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení. Řekneme, že je f svazový homomorfismus, jestliže pro každé $a, b \in G$ platí

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b).$$

Řekneme, že f je svazový izomorfismus (neboli izomorfismus svazů), je-li f bijektivní homomorfismus.

Poznámka. Protože každý svaz je také uspořádaná množina, má smysl se ptát, zda svazový homomorfismus je též izotonní zobrazení.

Každý homomorfismus svazů je izotonním zobrazením

Věta 3.3. *Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení.*

Každý homomorfismus svazů je izotonním zobrazením

Věta 3.3. *Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení.*

1. *Je-li f svazový homomorfismus, pak f je izotonní zobrazení a homomorfní obraz*

$$f(G) = \{f(a);\ a \in G\}$$

je podsvaz svazu H.

Každý homomorfismus svazů je izotonním zobrazením

Věta 3.3. *Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení.*

1. *Je-li f svazový homomorfismus, pak f je izotonní zobrazení a homomorfní obraz*

$$f(G) = \{f(a);\, a \in G\}$$

   je podsvaz svazu H.

2. *Zobrazení f je svazový izomorfismus, právě když f je izomorfismus uspořádaných množin.*

Každý homomorfismus svazů je izotonním zobrazením

Věta 3.3. Nechť G a H jsou svazy, $f : G \to H$ zobrazení.

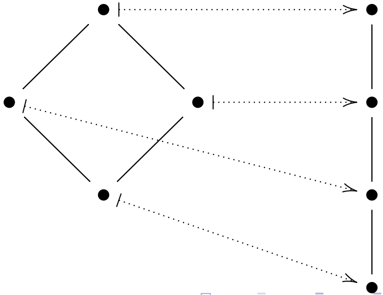
1. *Je-li f svazový homomorfismus, pak f je izotonní zobrazení a homomorfní obraz*

$$f(G) = \{f(a);\ a \in G\}$$

   je podsvaz svazu H.

2. *Zobrazení f je svazový izomorfismus, právě když f je izomorfismus uspořádaných množin.*

Poznámka. Jak ukazuje tento příklad, izotonní zobrazení mezi svazy nemusí být svazovým homomorfismem.



Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus. Nejprve ukážeme, že pak f^{-1} je svazový homomorfismus.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus. Nejprve ukážeme, že pak f^{-1} je svazový homomorfismus. Zvolme libovolně $c, d \in H$ a označme $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus. Nejprve ukážeme, že pak f^{-1} je svazový homomorfismus. Zvolme libovolně $c, d \in H$ a označme $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. Pak platí

$$\begin{aligned} f^{-1}(c \vee d) &= f^{-1}(f(a) \vee f(b)) = f^{-1}(f(a \vee b)) = a \vee b = \\ &= f^{-1}(c) \vee f^{-1}(d), \\ f^{-1}(c \wedge d) &= f^{-1}(f(a) \wedge f(b)) = f^{-1}(f(a \wedge b)) = a \wedge b = \\ &= f^{-1}(c) \wedge f^{-1}(d). \end{aligned}$$

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus. Nejprve ukážeme, že pak f^{-1} je svazový homomorfismus. Zvolme libovolně $c, d \in H$ a označme $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. Pak platí

$$\begin{aligned} f^{-1}(c \vee d) &= f^{-1}(f(a) \vee f(b)) = f^{-1}(f(a \vee b)) = a \vee b = \\ &= f^{-1}(c) \vee f^{-1}(d), \\ f^{-1}(c \wedge d) &= f^{-1}(f(a) \wedge f(b)) = f^{-1}(f(a \wedge b)) = a \wedge b = \\ &= f^{-1}(c) \wedge f^{-1}(d). \end{aligned}$$

Odvodili jsme, že f^{-1} je svazový homomorfismus.

Důkaz věty. 1. Předpokládejme, že f je svazový homomorfismus. Pro každé $a, b \in G$ z $a \leq b$ plyne $a = a \wedge b$, proto $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, a tedy $f(a) \leq f(b)$. Je tedy f izotonní. To, že $f(G)$ je podsvaz svazu H, plyne přímo z definic.

2. „$\Rightarrow$“ Nechť je f svazový izomorfismus. Nejprve ukážeme, že pak f^{-1} je svazový homomorfismus. Zvolme libovolně $c, d \in H$ a označme $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$. Pak platí

$$\begin{aligned} f^{-1}(c \vee d) &= f^{-1}(f(a) \vee f(b)) = f^{-1}(f(a \vee b)) = a \vee b = \\ &= f^{-1}(c) \vee f^{-1}(d), \\ f^{-1}(c \wedge d) &= f^{-1}(f(a) \wedge f(b)) = f^{-1}(f(a \wedge b)) = a \wedge b = \\ &= f^{-1}(c) \wedge f^{-1}(d). \end{aligned}$$

Odvodili jsme, že f^{-1} je svazový homomorfismus. Aplikací první části věty na zobrazení f i f^{-1} dostaneme, že f je izomorfismus uspořádaných množin.

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$.

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$.

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$. Nechť $c \in H$ je libovolný takový, že $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$.

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$. Nechť $c \in H$ je libovolný takový, že $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$. Protože f^{-1} je izotonní zobrazení, platí $a \leq f^{-1}(c)$, $b \leq f^{-1}(c)$, proto i $a \vee b \leq f^{-1}(c)$, a protože f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a \vee b) \leq c$.

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$. Nechť $c \in H$ je libovolný takový, že $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$. Protože f^{-1} je izotonní zobrazení, platí $a \leq f^{-1}(c)$, $b \leq f^{-1}(c)$, proto i $a \vee b \leq f^{-1}(c)$, a protože f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a \vee b) \leq c$. To ale znamená, že $f(a \vee b)$ je supremum prvků $f(a)$, $f(b)$, tedy

$$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b).$$

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$. Nechť $c \in H$ je libovolný takový, že $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$. Protože f^{-1} je izotonní zobrazení, platí $a \leq f^{-1}(c)$, $b \leq f^{-1}(c)$, proto i $a \vee b \leq f^{-1}(c)$, a protože f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a \vee b) \leq c$. To ale znamená, že $f(a \vee b)$ je supremum prvků $f(a)$, $f(b)$, tedy

$$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b).$$

Analogicky (nebo z duality) dostaneme

$$f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b).$$

2. „$\Leftarrow$“ Nechť nyní naopak f je izomorfismus uspořádaných množin, $a, b \in G$. Protože $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ a f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$, je tedy $f(a \vee b)$ horní závora prvků $f(a)$, $f(b)$. Nechť $c \in H$ je libovolný takový, že $f(a) \leq c$, $f(b) \leq c$. Protože f^{-1} je izotonní zobrazení, platí $a \leq f^{-1}(c)$, $b \leq f^{-1}(c)$, proto i $a \vee b \leq f^{-1}(c)$, a protože f je izotonní zobrazení, dostáváme $f(a \vee b) \leq c$. To ale znamená, že $f(a \vee b)$ je supremum prvků $f(a)$, $f(b)$, tedy

$$f(a) \vee f(b) = f(a \vee b).$$

Analogicky (nebo z duality) dostaneme

$$f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b).$$

Je tedy f izomorfismus svazů.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \dots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \dots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G. Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G. Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G. Dolní závora množiny A ve svazu G je prvek $x \in G$ takový, že pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \dots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G. Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G. Dolní závora množiny A ve svazu G je prvek $x \in G$ takový, že pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$. V případě $A = \emptyset$ je tato podmínka splněna pro každé $x \in G$, a tedy odtud plyne, že každý prvek svazu G je v G dolní závorou prázdné množiny.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \ldots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G. Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G. Dolní závora množiny A ve svazu G je prvek $x \in G$ takový, že pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$. V případě $A = \emptyset$ je tato podmínka splněna pro každé $x \in G$, a tedy odtud plyne, že každý prvek svazu G je v G dolní závorou prázdné množiny. Proto infimem prázdné množiny ve svazu G je největší prvek svazu G.

Úplné svazy

Poznámka. Podle věty 2.4 v libovolném svazu má každá neprázdná konečná podmnožina $\{a_1, \dots, a_n\}$ supremum $a_1 \vee \dots \vee a_n$ a infimum $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$. Nekonečná anebo prázdná podmnožina však supremum či infimum obecně mít nemusí.

Definice. Uspořádaná množina, v níž pro každou podmnožinu existuje supremum i infimum, se nazývá úplný svaz.

Poznámka. Každý úplný svaz G má nejmenší prvek (infimum množiny G) a největší prvek (supremum množiny G).

Poznámka. Promysleme si, co znamená infimum, resp. supremum prázdné podmnožiny svazu G. Je-li $A \subseteq G$, pak infimum množiny A ve svazu G je největší dolní závora množiny A ve svazu G. Dolní závora množiny A ve svazu G je prvek $x \in G$ takový, že pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$. V případě $A = \emptyset$ je tato podmínka splněna pro každé $x \in G$, a tedy odtud plyne, že každý prvek svazu G je v G dolní závorou prázdné množiny. Proto infimem prázdné množiny ve svazu G je největší prvek svazu G. Duálně: supremem prázdné množiny ve svazu G je nejmenší prvek svazu G.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum.
Jinými slovy: prázdný svaz nemá nejmenší prvek ani největší prvek, protože nemá žádný prvek.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum.
Jinými slovy: prázdný svaz nemá nejmenší prvek ani největší prvek, protože nemá žádný prvek.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ úplný svaz.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum.
Jinými slovy: prázdný svaz nemá nejmenší prvek ani největší prvek, protože nemá žádný prvek.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ úplný svaz.

Příklad. Pro libovolnou nekonečnou množinu X tvoří množina všech konečných podmnožin množiny X spolu s inkluzí $\subseteq$ svaz, který není úplným svazem.

Příklady

Příklad. Zřejmě platí, že každý úplný svaz je svazem.

Příklad. Podle věty 2.4 je každý neprázdný konečný svaz úplným svazem.

Příklad. Prázdný svaz není úplný, neboť pro jeho (jedinou) prázdnou podmnožinu neexistuje infimum ani supremum.
Jinými slovy: prázdný svaz nemá nejmenší prvek ani největší prvek, protože nemá žádný prvek.

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ úplný svaz.

Příklad. Pro libovolnou nekonečnou množinu X tvoří množina všech konečných podmnožin množiny X spolu s inkluzí $\subseteq$ svaz, který není úplným svazem.

Příklad. Nekonečný řetězec nemusí být úplný svaz, například $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný svaz, neboť neexistuje supremum celé množiny $\mathbb{N}$.

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

<u>*Věta 4.1.*</u> *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
3. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$(G, \leq)$ je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ supremum.*
3. *každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ infimum.*
4. *$(G, \leq)$ má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ supremum.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
3. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*
4. $(G, \leq)$ *má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
5. $(G, \leq)$ *má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
3. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*
4. $(G, \leq)$ *má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
5. $(G, \leq)$ *má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*

Důkaz. Protože infimum (resp. supremum) prázdné množiny je největší (resp. nejmenší) prvek, je čtvrtá podmínka identická s druhou a pátá s třetí.

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť $(G, \leq)$ je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$(G, \leq)$ je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ supremum.*
3. *každá podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ infimum.*
4. *$(G, \leq)$ má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ supremum.*
5. *$(G, \leq)$ má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny G má v uspořádané množině $(G, \leq)$ infimum.*

Důkaz. Protože infimum (resp. supremum) prázdné množiny je největší (resp. nejmenší) prvek, je čtvrtá podmínka identická s druhou a pátá s třetí.
Druhá a třetí podmínka jsou navzájem duální, zatímco první podmínka je duální sama k sobě.

Ekvivaletní charakterizace úplného svazu

Věta 4.1. *Nechť* $(G, \leq)$ *je uspořádaná množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $(G, \leq)$ *je úplný svaz.*
2. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
3. *každá podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*
4. $(G, \leq)$ *má nejmenší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *supremum.*
5. $(G, \leq)$ *má největší prvek a každá neprázdná podmnožina množiny* G *má v uspořádané množině* $(G, \leq)$ *infimum.*

Důkaz. Protože infimum (resp. supremum) prázdné množiny je největší (resp. nejmenší) prvek, je čtvrtá podmínka identická s druhou a pátá s třetí.
Druhá a třetí podmínka jsou navzájem duální, zatímco první podmínka je duální sama k sobě. Stačí ukázat, že první je ekvivalentní s druhou, ekvivalenci první s třetí dostaneme z duality.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S; \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S; \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Podle předpokladů má B supremum, které označíme m.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S; \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Podle předpokladů má B supremum, které označíme m.
Pro libovolné $a \in A$ platí $x \leq a$ pro všechna $x \in B$, proto a je horní závora množiny B.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S;\ \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Podle předpokladů má B supremum, které označíme m.
Pro libovolné $a \in A$ platí $x \leq a$ pro všechna $x \in B$, proto a je horní závora množiny B. Ovšem m je její supremum, tedy $m \leq a$.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S; \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Podle předpokladů má B supremum, které označíme m.
Pro libovolné $a \in A$ platí $x \leq a$ pro všechna $x \in B$, proto a je horní závora množiny B. Ovšem m je její supremum, tedy $m \leq a$. To však platí pro všechny $a \in A$, a proto $m \in B$.

Z definice úplného svazu je vidět, že z první podmínky plyne druhá. Ukažme, že z druhé plyne první.

Předpokládejme tedy, že každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ supremum, a ukažme, že pak také každá podmnožina množiny G má v $(G, \leq)$ infimum, a tedy že $(G, \leq)$ je úplný svaz.

Nechť A je libovolná podmnožina množiny G. Označme B množinu všech dolních závor množiny A, tj.

$$B = \{x \in S; \forall a \in A : x \leq a\}.$$

Podle předpokladů má B supremum, které označíme m.
Pro libovolné $a \in A$ platí $x \leq a$ pro všechna $x \in B$, proto a je horní závora množiny B. Ovšem m je její supremum, tedy $m \leq a$.
To však platí pro všechny $a \in A$, a proto $m \in B$.
Je tedy m největší ze všech dolních závor množiny A, tedy její infimum.

Příklady

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup (to, že jejich průnikem je opět podgrupa, jsme dokazovali kvůli definici podgrupy generované podmnožinou grupy).

Příklady

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup (to, že jejich průnikem je opět podgrupa, jsme dokazovali kvůli definici podgrupy generované podmnožinou grupy). Rovněž svaz všech podsvazů (popřípadě svaz ideálů nebo svaz filtrů) daného svazu je úplný svaz (viz větu 3.1).

Příklady

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup (to, že jejich průnikem je opět podgrupa, jsme dokazovali kvůli definici podgrupy generované podmnožinou grupy). Rovněž svaz všech podsvazů (popřípadě svaz ideálů nebo svaz filtrů) daného svazu je úplný svaz (viz větu 3.1).
Díky analogickým větám o průnicích neprázdných systémů nějakých podstruktur lze totéž říci i o svazu všech podokruhů daného okruhu nebo o svazu všech podprostorů daného vektorového prostoru.

Příklady

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup (to, že jejich průnikem je opět podgrupa, jsme dokazovali kvůli definici podgrupy generované podmnožinou grupy). Rovněž svaz všech podsvazů (popřípadě svaz ideálů nebo svaz filtrů) daného svazu je úplný svaz (viz větu 3.1).
Díky analogickým větám o průnicích neprázdných systémů nějakých podstruktur lze totéž říci i o svazu všech podokruhů daného okruhu nebo o svazu všech podprostorů daného vektorového prostoru.

Příklad. $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek ∞ a každá neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ má v $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ infimum (plyne z dobré uspořádanosti).

Příklady

Příklad. Svaz všech podgrup dané grupy G je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek (celou grupu G) a každá neprázdná množina podgrup má v tomto svazu infimum, kterým je průnik těchto podgrup (to, že jejich průnikem je opět podgrupa, jsme dokazovali kvůli definici podgrupy generované podmnožinou grupy). Rovněž svaz všech podsvazů (popřípadě svaz ideálů nebo svaz filtrů) daného svazu je úplný svaz (viz větu 3.1).
Díky analogickým větám o průnicích neprázdných systémů nějakých podstruktur lze totéž říci i o svazu všech podokruhů daného okruhu nebo o svazu všech podprostorů daného vektorového prostoru.

Příklad. $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ je dle předchozí věty úplný svaz, neboť má největší prvek ∞ a každá neprázdná podmnožina množiny $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ má v $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ infimum (plyne z dobré uspořádanosti).

Příklad. Ze svazu $(\mathbb{N}, |)$, který není úplný, lze doplněním nuly (která se stane jeho největším prvkem) utvořit svaz $(\mathbb{N} \cup \{0\}, |)$, který je úplný, neboť každé přirozené číslo má jen konečně mnoho dělitelů, a tedy každá neprázdná podmnožina má v $(\mathbb{N}, |)$ infimum.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. *Nechť G je svaz.*

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. *Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.*

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. *Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.*

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f : G \to U$.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f: G \to U$. Pak je totiž $f(G)$ podsvaz svazu U a zúžením oboru hodnot dostaneme svazový izomorfismus $f: G \to f(G)$.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f : G \to U$. Pak je totiž $f(G)$ podsvaz svazu U a zúžením oboru hodnot dostaneme svazový izomorfismus $f : G \to f(G)$.
Nechť U značí množinu všech ideálů svazu G.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f : G \to U$. Pak je totiž $f(G)$ podsvaz svazu U a zúžením oboru hodnot dostaneme svazový izomorfismus $f : G \to f(G)$.
Nechť U značí množinu všech ideálů svazu G. Ve větě 3.1 jsme ukázali, že průnik libovolného neprázdného systému prvků z U je opět prvkem U.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f : G \to U$. Pak je totiž $f(G)$ podsvaz svazu U a zúžením oboru hodnot dostaneme svazový izomorfismus $f : G \to f(G)$.

Nechť U značí množinu všech ideálů svazu G. Ve větě 3.1 jsme ukázali, že průnik libovolného neprázdného systému prvků z U je opět prvkem U. Protože uspořádaná množina $(U, \subseteq)$ má největší prvek G, je to dle předchozí věty úplný svaz.

Zúplnění svazu

Poznámka. Jak ukazuje následující věta, předchozí dva příklady nebyly nijak výjimečné: vždy existuje způsob, jak doplnit svaz tak, aby se stal úplným.

Věta 4.2. Nechť G je svaz. Pak existuje úplný svaz U, který obsahuje podsvaz H, který je izomorfní se svazem G.

Důkaz. Je jasné, že stačí najít vhodný úplný svaz U a injektivní svazový homomorfismus $f : G \to U$. Pak je totiž $f(G)$ podsvaz svazu U a zúžením oboru hodnot dostaneme svazový izomorfismus $f : G \to f(G)$.

Nechť U značí množinu všech ideálů svazu G. Ve větě 3.1 jsme ukázali, že průnik libovolného neprázdného systému prvků z U je opět prvkem U. Protože uspořádaná množina $(U, \subseteq)$ má největší prvek G, je to dle předchozí věty úplný svaz. Přitom pro libovolné dva prvky $A, B \in U$ je jejich infimem $A \wedge B = A \cap B$ množinový průnik, jejich supremem $A \vee B = (A \cup B)\downarrow$ je ideál generovaný množinovým sjednocením.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\downarrow$.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G; x \leq a\}$.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \le a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \le b$, analogicky $b \le a$, dohromady $a = b$.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \le a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \le b$, analogicky $b \le a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\!\downarrow$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b\!\downarrow$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\downarrow$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b\downarrow$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b)\downarrow = a\downarrow \cap b\downarrow, \qquad (a \vee b)\downarrow = (a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow.$$

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\!\downarrow$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\ x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b\!\downarrow$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b)\!\downarrow = a\!\downarrow \cap\, b\!\downarrow, \qquad (a \vee b)\!\downarrow = (a\!\downarrow \cup\, b\!\downarrow)\!\downarrow.$$

Nejprve dokažme první rovnost.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\ x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b){\downarrow} = a{\downarrow} \cap b{\downarrow}, \qquad (a \vee b){\downarrow} = (a{\downarrow} \cup b{\downarrow}){\downarrow}.$$

Nejprve dokažme první rovnost. Protože $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$, platí $a \wedge b \in a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$, odkud $(a \wedge b){\downarrow} \subseteq a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b){\downarrow} = a{\downarrow} \cap b{\downarrow}, \qquad (a \vee b){\downarrow} = (a{\downarrow} \cup b{\downarrow}){\downarrow}.$$

Nejprve dokažme první rovnost. Protože $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$, platí $a \wedge b \in a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$, odkud $(a \wedge b){\downarrow} \subseteq a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$. Naopak, je-li $x \in a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$, je $x \leq a$, $x \leq b$, tedy $x \leq a \wedge b$, neboli $x \in (a \wedge b){\downarrow}$.

Uvažme zobrazení $f: G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\!\downarrow$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b\!\downarrow$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b)\!\downarrow = a\!\downarrow \cap\, b\!\downarrow, \qquad (a \vee b)\!\downarrow = (a\!\downarrow \cup\, b\!\downarrow)\!\downarrow.$$

Nejprve dokažme první rovnost. Protože $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$, platí $a \wedge b \in a\!\downarrow \cap\, b\!\downarrow$, odkud $(a \wedge b)\!\downarrow \subseteq a\!\downarrow \cap\, b\!\downarrow$. Naopak, je-li $x \in a\!\downarrow \cap\, b\!\downarrow$, je $x \leq a$, $x \leq b$, tedy $x \leq a \wedge b$, neboli $x \in (a \wedge b)\!\downarrow$. Nyní se zaměřme na druhou rovnost.

Uvažme zobrazení $f: G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a{\downarrow}$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G;\, x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b{\downarrow}$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b){\downarrow} = a{\downarrow} \cap b{\downarrow}, \qquad (a \vee b){\downarrow} = (a{\downarrow} \cup b{\downarrow}){\downarrow}.$$

Nejprve dokažme první rovnost. Protože $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$, platí $a \wedge b \in a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$, odkud $(a \wedge b){\downarrow} \subseteq a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$. Naopak, je-li $x \in a{\downarrow} \cap b{\downarrow}$, je $x \leq a$, $x \leq b$, tedy $x \leq a \wedge b$, neboli $x \in (a \wedge b){\downarrow}$. Nyní se zaměřme na druhou rovnost. Z nerovností $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$, plynou inkluze $a{\downarrow} \subseteq (a \vee b){\downarrow}$, $b{\downarrow} \subseteq (a \vee b){\downarrow}$, odkud $a{\downarrow} \cup b{\downarrow} \subseteq (a \vee b){\downarrow}$ a proto i $(a{\downarrow} \cup b{\downarrow}){\downarrow} \subseteq (a \vee b){\downarrow}$.

Uvažme zobrazení $f : G \to U$, které každý prvek svazu G zobrazí na ideál jím generovaný: pro každé $a \in G$ klademe $f(a) = a\downarrow$. Podle věty 3.2 je tedy $f(a) = \{x \in G; x \leq a\}$. Odtud plyne, že f je injekce: jsou-li totiž $a, b \in G$ takové, že $f(a) = f(b)$, pak $a \in b\downarrow$, odkud $a \leq b$, analogicky $b \leq a$, dohromady $a = b$. Budeme hotovi, ukážeme-li, že f je svazový homomorfismus. Nechť $a, b \in G$ jsou libovolné. Máme ukázat, že

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b), \qquad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

což znamená

$$(a \wedge b)\downarrow = a\downarrow \cap b\downarrow, \qquad (a \vee b)\downarrow = (a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow.$$

Nejprve dokažme první rovnost. Protože $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$, platí $a \wedge b \in a\downarrow \cap b\downarrow$, odkud $(a \wedge b)\downarrow \subseteq a\downarrow \cap b\downarrow$. Naopak, je-li $x \in a\downarrow \cap b\downarrow$, je $x \leq a$, $x \leq b$, tedy $x \leq a \wedge b$, neboli $x \in (a \wedge b)\downarrow$. Nyní se zaměřme na druhou rovnost. Z nerovností $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$, plynou inkluze $a\downarrow \subseteq (a \vee b)\downarrow$, $b\downarrow \subseteq (a \vee b)\downarrow$, odkud $a\downarrow \cup b\downarrow \subseteq (a \vee b)\downarrow$ a proto i $(a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow \subseteq (a \vee b)\downarrow$. Na druhou stranu platí $a, b \in (a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow$, proto i $a \vee b \in (a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow$, odkud $(a \vee b)\downarrow \subseteq (a\downarrow \cup b\downarrow)\downarrow$.

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). *Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení.*

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). *Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).*

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

Důkaz. Označme

$$A = \{x \in G;\ x \leq \varphi(x)\}.$$

Tarského věta

<u>Věta 4.3 (Tarski).</u> Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

<u>Důkaz.</u> Označme

$$A = \{x \in G;\, x \le \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

Důkaz. Označme

$$A = \{x \in G;\, x \leq \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.
Pro každé $x \in A$ tedy platí $x \leq a$, a proto z izotonie $\varphi(x) \leq \varphi(a)$, což spolu s $x \leq \varphi(x)$ (vždyť $x \in A$) dává $x \leq \varphi(a)$.

Tarského věta

<u>Věta 4.3 (Tarski).</u> Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

<u>Důkaz.</u> Označme

$$A = \{x \in G;\ x \leq \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.
Pro každé $x \in A$ tedy platí $x \leq a$, a proto z izotonie $\varphi(x) \leq \varphi(a)$, což spolu s $x \leq \varphi(x)$ (vždyť $x \in A$) dává $x \leq \varphi(a)$. Je tedy $\varphi(a)$ horní závora množiny A, tedy její supremum $a \leq \varphi(a)$.

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

Důkaz. Označme

$$A = \{x \in G;\, x \leq \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.
Pro každé $x \in A$ tedy platí $x \leq a$, a proto z izotonie $\varphi(x) \leq \varphi(a)$, což spolu s $x \leq \varphi(x)$ (vždyť $x \in A$) dává $x \leq \varphi(a)$. Je tedy $\varphi(a)$ horní závora množiny A, tedy její supremum $a \leq \varphi(a)$. Z izotonie $\varphi(a) \leq \varphi(\varphi(a))$, ale to znamená $\varphi(a) \in A$.

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).

Důkaz. Označme

$$A = \{x \in G;\, x \leq \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.
Pro každé $x \in A$ tedy platí $x \leq a$, a proto z izotonie $\varphi(x) \leq \varphi(a)$, což spolu s $x \leq \varphi(x)$ (vždyť $x \in A$) dává $x \leq \varphi(a)$. Je tedy $\varphi(a)$ horní závora množiny A, tedy její supremum $a \leq \varphi(a)$. Z izotonie $\varphi(a) \leq \varphi(\varphi(a))$, ale to znamená $\varphi(a) \in A$. Ovšem a je supremum množiny A, proto $\varphi(a) \leq a$.

Tarského věta

Věta 4.3 (Tarski). *Nechť G je úplný svaz, $\varphi : G \to G$ izotonní zobrazení. Pak existuje prvek $a \in G$ tak, že $\varphi(a) = a$ (tj. a je pevný bod zobrazení φ).*

Důkaz. Označme

$$A = \{x \in G;\, x \leq \varphi(x)\}.$$

Protože G je úplný svaz, existuje supremum a množiny A.
Pro každé $x \in A$ tedy platí $x \leq a$, a proto z izotonie $\varphi(x) \leq \varphi(a)$, což spolu s $x \leq \varphi(x)$ (vždyť $x \in A$) dává $x \leq \varphi(a)$. Je tedy $\varphi(a)$ horní závora množiny A, tedy její supremum $a \leq \varphi(a)$. Z izotonie $\varphi(a) \leq \varphi(\varphi(a))$, ale to znamená $\varphi(a) \in A$. Ovšem a je supremum množiny A, proto $\varphi(a) \leq a$. Celkem tedy $a = \varphi(a)$.

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz.

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$, $(H, \vee, \wedge)$ jsou svazy.

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$, $(H, \vee, \wedge)$ jsou svazy. Na kartézském součinu $G \times H$ definujme nové operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro každé $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ klademe

$$
\begin{aligned}
(g_1, h_1) \vee (g_2, h_2) &= (g_1 \vee g_2, h_1 \vee h_2). \\
(g_1, h_1) \wedge (g_2, h_2) &= (g_1 \wedge g_2, h_1 \wedge h_2).
\end{aligned}
$$

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$, $(H, \vee, \wedge)$ jsou svazy. Na kartézském součinu $G \times H$ definujme nové operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro každé $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ klademe

$$
\begin{aligned}
(g_1, h_1) \vee (g_2, h_2) &= (g_1 \vee g_2, h_1 \vee h_2). \\
(g_1, h_1) \wedge (g_2, h_2) &= (g_1 \wedge g_2, h_1 \wedge h_2).
\end{aligned}
$$

Věta 5.1. $(G \times H, \vee, \wedge)$ *z předchozí definice je svaz.*

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$, $(H, \vee, \wedge)$ jsou svazy. Na kartézském součinu $G \times H$ definujme nové operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro každé $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ klademe

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) \vee (g_2, h_2) &= (g_1 \vee g_2, h_1 \vee h_2).\\ (g_1, h_1) \wedge (g_2, h_2) &= (g_1 \wedge g_2, h_1 \wedge h_2).\end{aligned}$$

Věta 5.1. $(G \times H, \vee, \wedge)$ *z předchozí definice je svaz.*

Důkaz. Je třeba ověřit, že obě operace jsou asociativní, komutativní a idempotentní a že platí absorpční zákony.

Součin svazů

Poznámka. Tak jako jsme součinem grup $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ získali grupu $(G \times H, \cdot)$ na kartézském součinu nosičů obou grup, můžeme součinem svazů získat nový svaz. Konstrukce je stejná: operace na uspořádaných dvojicích se provedou nezávisle v každé složce.

Definice. Nechť $(G, \vee, \wedge)$, $(H, \vee, \wedge)$ jsou svazy. Na kartézském součinu $G \times H$ definujme nové operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro každé $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$ klademe

$$
\begin{aligned}
(g_1, h_1) \vee (g_2, h_2) &= (g_1 \vee g_2, h_1 \vee h_2). \\
(g_1, h_1) \wedge (g_2, h_2) &= (g_1 \wedge g_2, h_1 \wedge h_2).
\end{aligned}
$$

Věta 5.1. $(G \times H, \vee, \wedge)$ *z předchozí definice je svaz.*

Důkaz. Je třeba ověřit, že obě operace jsou asociativní, komutativní a idempotentní a že platí absorpční zákony. To je snadné: vždy se přitom využije, že dokazovaná rovnost platí v každém z obou svazů a že operace se v součinu počítají po složkách.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazů zdědit nemusí.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazů zdědit nemusí.
Například vlastnost být řetězec můžeme zachytit takto: pro každé dva prvky x, y platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, což pomocí svazových operací lze zapsat podmínkou $x \wedge y = x$ nebo $x \wedge y = y$.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazů zdědit nemusí.
Například vlastnost být řetězec můžeme zachytit takto: pro každé dva prvky x, y platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, což pomocí svazových operací lze zapsat podmínkou $x \wedge y = x$ nebo $x \wedge y = y$. To však není konjunkce rovností, ale disjunkce.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazů zdědit nemusí.
Například vlastnost být řetězec můžeme zachytit takto: pro každé dva prvky x, y platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, což pomocí svazových operací lze zapsat podmínkou $x \wedge y = x$ nebo $x \wedge y = y$. To však není konjunkce rovností, ale disjunkce.
A skutečně, tato vlastnost se součinem nedědí: součinem dvou dvouprvkových řetězců je čtyřprvkový svaz, který není řetězec.

Poznámky o součinu svazů

Poznámka. Jak jsme si rozmysleli v předchozím důkaze, v součinu svazů platí všechny rovnosti platné v obou svazech. Vlastnosti, které se však nedají vyjádřit jako konjunkce rovností, už součin svazů zdědit nemusí.
Například vlastnost být řetězec můžeme zachytit takto: pro každé dva prvky x, y platí $x \leq y$ nebo $x \geq y$, což pomocí svazových operací lze zapsat podmínkou $x \wedge y = x$ nebo $x \wedge y = y$. To však není konjunkce rovností, ale disjunkce.
A skutečně, tato vlastnost se součinem nedědí: součinem dvou dvouprvkových řetězců je čtyřprvkový svaz, který není řetězec.

Poznámka. Podobně jako součin dvou svazů jsme mohli definovat i součin n svazů pro libovolné $n \in \mathbb{N}$: na kartézském součinu nosných množin daných svazů se nové operace $\vee$ a $\wedge$ definují po složkách.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární. Snadno se ověří, že pro libovolné množiny $A, B, C \subseteq X$ platí $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární. Snadno se ověří, že pro libovolné množiny $A, B, C \subseteq X$ platí $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Jestliže totiž $x \in A \cap (B \cup C)$ a $x \notin C$, pak $x \in A \cap B$.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární. Snadno se ověří, že pro libovolné množiny $A, B, C \subseteq X$ platí $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Jestliže totiž $x \in A \cap (B \cup C)$ a $x \notin C$, pak $x \in A \cap B$.

Příklad. Libovolný řetězec je modulární svaz.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární. Snadno se ověří, že pro libovolné množiny $A, B, C \subseteq X$ platí $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Jestliže totiž $x \in A \cap (B \cup C)$ a $x \notin C$, pak $x \in A \cap B$.

Příklad. Libovolný řetězec je modulární svaz. Stačí ověřit rovnost pro každý ze tří případů $b \leq c \leq a$, $c \leq b \leq a$, $c \leq a \leq b$.

Modulární svazy

Poznámka. Podle věty 2.3 v libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ takových, že $c \leq a$, platí modulární nerovnost

$$(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá modulární, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c).$$

Příklad. Pro libovolnou množinu X je svaz $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ všech podmnožin množiny X modulární. Snadno se ověří, že pro libovolné množiny $A, B, C \subseteq X$ platí $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Jestliže totiž $x \in A \cap (B \cup C)$ a $x \notin C$, pak $x \in A \cap B$.

Příklad. Libovolný řetězec je modulární svaz. Stačí ověřit rovnost pro každý ze tří případů $b \leq c \leq a$, $c \leq b \leq a$, $c \leq a \leq b$. Pro každý z nich vždy vyjde na obou stranách rovnosti „prostřední" prvek.

Podsvaz modulárního svazu je modulární

<u>Věta 6.1.</u> Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.

Podsvaz modulárního svazu je modulární

Věta 6.1. *Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.*

Důkaz. Plyne přímo z definice: v podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu, proto je tam i stejné uspořádání.

Podsvaz modulárního svazu je modulární

Věta 6.1. *Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.*

Důkaz. Plyne přímo z definice: v podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu, proto je tam i stejné uspořádání.

Příklad. Později ukážeme, že například svaz všech podgrup dané komutativní grupy je modulární. Dalším příkladem modulárního svazu je svaz všech podprostorů daného vektorového prostoru V nad tělesem T (i toto vysvětlíme později).

Podsvaz modulárního svazu je modulární

Věta 6.1. *Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.*

Důkaz. Plyne přímo z definice: v podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu, proto je tam i stejné uspořádání.

Příklad. Později ukážeme, že například svaz všech podgrup dané komutativní grupy je modulární. Dalším příkladem modulárního svazu je svaz všech podprostorů daného vektorového prostoru V nad tělesem T (i toto vysvětlíme později).

Definice. Nechť G je svaz, $a, b \in G$, $a \leq b$. Množina $[a, b] = \{x \in G; a \leq x \leq b\}$ se nazývá interval ve svazu G.

Podsvaz modulárního svazu je modulární

Věta 6.1. *Podsvaz modulárního svazu je modulární svaz.*

Důkaz. Plyne přímo z definice: v podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu, proto je tam i stejné uspořádání.

Příklad. Později ukážeme, že například svaz všech podgrup dané komutativní grupy je modulární. Dalším příkladem modulárního svazu je svaz všech podprostorů daného vektorového prostoru V nad tělesem T (i toto vysvětlíme později).

Definice. Nechť G je svaz, $a, b \in G$, $a \leq b$. Množina $[a, b] = \{x \in G; a \leq x \leq b\}$ se nazývá interval ve svazu G.

Poznámka. Protože $[a, b] = (a\uparrow) \cap (b\downarrow)$, je každý interval podsvazem svazu G.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. *Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.*

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. *Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.*

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Duálně lze ukázat, že zobrazení $g : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ dané předpisem $g(y) = y \vee a$ pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ je izotonní.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. *Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.*

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Duálně lze ukázat, že zobrazení $g : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ dané předpisem $g(y) = y \vee a$ pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ je izotonní.

Pro každé $x \in [a, a \vee b]$ je $g(f(x)) = (x \wedge b) \vee a$.

Intervaly v modulárním svazu

<u>Věta 6.2.</u> Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.

<u>Důkaz.</u> Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Duálně lze ukázat, že zobrazení $g : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ dané předpisem $g(y) = y \vee a$ pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ je izotonní.

Pro každé $x \in [a, a \vee b]$ je $g(f(x)) = (x \wedge b) \vee a$. Protože $a \leq x$ plyne z modularity $(x \wedge b) \vee a = x \wedge (b \vee a)$, je tedy $g(f(x)) = x \wedge (b \vee a) = x$, neboť $x \leq a \vee b$.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. *Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.*

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Duálně lze ukázat, že zobrazení $g : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ dané předpisem $g(y) = y \vee a$ pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ je izotonní.

Pro každé $x \in [a, a \vee b]$ je $g(f(x)) = (x \wedge b) \vee a$. Protože $a \leq x$ plyne z modularity $(x \wedge b) \vee a = x \wedge (b \vee a)$, je tedy $g(f(x)) = x \wedge (b \vee a) = x$, neboť $x \leq a \vee b$.

Analogicky pro každé $y \in [a, a \vee b]$ platí $f(g(y)) = y$.

Intervaly v modulárním svazu

Věta 6.2. Nechť G je modulární svaz, $a, b \in G$ libovolné. Pak intervaly $[a, a \vee b]$ a $[a \wedge b, b]$ jsou izomorfní svazy.

Důkaz. Pro libovolné $x \in [a, a \vee b]$ platí $a \leq x \leq a \vee b$, a tedy $a \wedge b \leq x \wedge b \leq (a \vee b) \wedge b = b$, tj. $x \wedge b \in [a \wedge b, b]$. Máme tedy zobrazení $f : [a, a \vee b] \to [a \wedge b, b]$ dané předpisem $f(x) = x \wedge b$. Zřejmě je f izotonní zobrazení.

Duálně lze ukázat, že zobrazení $g : [a \wedge b, b] \to [a, a \vee b]$ dané předpisem $g(y) = y \vee a$ pro každé $y \in [a \wedge b, b]$ je izotonní.

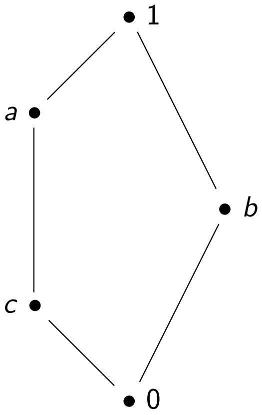
Pro každé $x \in [a, a \vee b]$ je $g(f(x)) = (x \wedge b) \vee a$. Protože $a \leq x$ plyne z modularity $(x \wedge b) \vee a = x \wedge (b \vee a)$, je tedy $g(f(x)) = x \wedge (b \vee a) = x$, neboť $x \leq a \vee b$.

Analogicky pro každé $y \in [a, a \vee b]$ platí $f(g(y)) = y$.

Proto f a g jsou navzájem inverzní izotonní zobrazení, a tedy izomorfismy uspořádaných množin, tj. izomorfismy svazů.

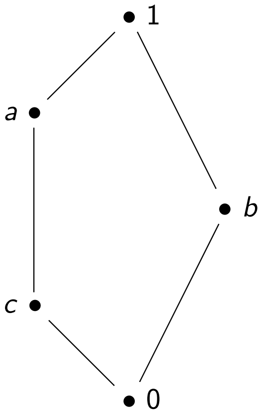
Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz N_5 (pětiúhelník)

Příklad. Svaz N_5, zvaný též pětiúhelník, není modulární.



Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz N_5 (pětiúhelník)

Příklad. Svaz N_5, zvaný též pětiúhelník, není modulární.



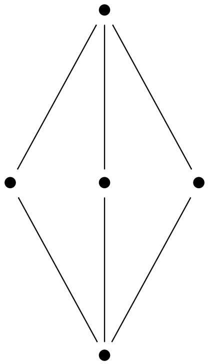
Skutečně, přestože $c < a$, platí

$$(a \wedge b) \vee c = 0 \vee c = c,$$

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a.$$

Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz M_5 (diamant)

Příklad. Svaz M_5, zvaný též diamant, je modulární.



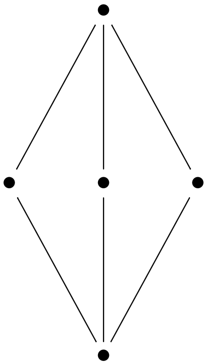
Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz M_5 (diamant)

<u>*Příklad.*</u> Svaz M_5, zvaný též diamant, je modulární.

Implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$

z definice modulárního svazu totiž zřejmě platí, je-li c nejmenší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $a \wedge b$)



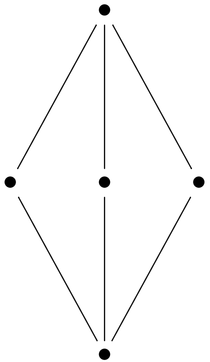
Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz M_5 (diamant)

Příklad. Svaz M_5, zvaný též diamant, je modulární.

Implikace

$$c \leq a \quad \Longrightarrow \quad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$

z definice modulárního svazu totiž zřejmě platí, je-li c nejmenší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $a \wedge b$) anebo je-li a největší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $b \vee c$).



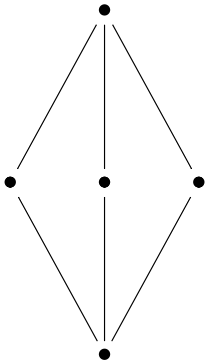
Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz M_5 (diamant)

Příklad. Svaz M_5, zvaný též diamant, je modulární.

Implikace

$$c \leq a \quad \Longrightarrow \quad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$

z definice modulárního svazu totiž zřejmě platí, je-li c nejmenší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $a \wedge b$) anebo je-li a největší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $b \vee c$). Jestliže $a = c$, platí rovnost také, tentokrát díky absorpčním zákonům.



Dva důležité pětiprvkové svazy: svaz M_5 (diamant)

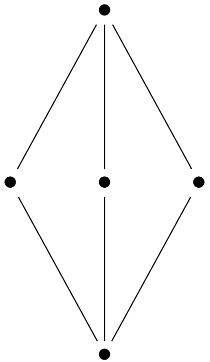
<u>*Příklad.*</u> Svaz M_5, zvaný též diamant, je modulární.

Implikace

$$c \leq a \qquad \Longrightarrow \qquad (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$

z definice modulárního svazu totiž zřejmě platí, je-li c nejmenší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $a \wedge b$) anebo je-li a největší prvek svazu (pak je na obou stranách rovnosti $b \vee c$). Jestliže $a = c$, platí rovnost také, tentokrát díky absorpčním zákonům.

V případě svazu M_5 jsou tím vyčerpány všechny možnosti.



Charakterizace modularity svazu rovností

Věta 6.3. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Charakterizace modularity svazu rovností

Věta 6.3. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Důkaz. Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$.

Charakterizace modularity svazu rovností

<u>Věta 6.3.</u> Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

<u>Důkaz.</u> Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$.

Charakterizace modularity svazu rovností

Věta 6.3. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Důkaz. Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Pak platí $a \wedge c = c$, a tedy

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c),$$

což jsme měli dokázat.

Charakterizace modularity svazu rovností

Věta 6.3. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Důkaz. Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Pak platí $a \wedge c = c$, a tedy

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c),$$

což jsme měli dokázat.

Důsledek. *Součin modulárních svazů je modulární svaz.*

Charakterizace modularity svazu rovností

<u>Věta 6.3.</u> Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

<u>Důkaz.</u> Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Pak platí $a \wedge c = c$, a tedy

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c),$$

což jsme měli dokázat.

<u>Důsledek.</u> Součin modulárních svazů je modulární svaz. Homomorfní obraz modulárního svazu je modulární svaz.

Charakterizace modularity svazu rovností

<u>*Věta 6.3.*</u> *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

<u>*Důkaz.*</u> Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Pak platí $a \wedge c = c$, a tedy

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c),$$

což jsme měli dokázat.

<u>*Důsledek.*</u> *Součin modulárních svazů je modulární svaz. Homomorfní obraz modulárního svazu je modulární svaz.*

<u>*Důkaz.*</u> Víme z důkazu věty 5.1, že součin zdědí libovolnou rovnost platnou v obou svazech.

Charakterizace modularity svazu rovností

Věta 6.3. Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)).$$

Důkaz. Je-li svaz modulární, plyne předchozí rovnost z modulární rovnosti pro prvky $a, b, a \wedge c$ díky zřejmé nerovnosti $a \wedge c \leq a$. Naopak, nechť svaz G splňuje rovnost této věty a nechť $a, b, c \in G$ jsou libovolné takové, že $c \leq a$. Pak platí $a \wedge c = c$, a tedy

$$(a \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (b \vee c),$$

což jsme měli dokázat.

Důsledek. Součin modulárních svazů je modulární svaz. Homomorfní obraz modulárního svazu je modulární svaz.

Důkaz. Víme z důkazu věty 5.1, že součin zdědí libovolnou rovnost platnou v obou svazech. Také tvrzení o homomorfních obrazech plyne z toho, že modularita je charakterizována rovností.

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$.

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak z absorpčních zákonů a modulární rovnosti plyne

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Důkaz. „$\Rightarrow$" Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak z absorpčních zákonů a modulární rovnosti plyne

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

„$\Leftarrow$" Předpokládejme, že ve svazu G platí implikace (1).

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \tag{1}$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak z absorpčních zákonů a modulární rovnosti plyne

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že ve svazu G platí implikace (1). Zvolme libovolně trojici prvků $a, b, c \in G$ tak, že $c \leq a$, a označme $x = (a \wedge b) \vee c$, $y = a \wedge (b \vee c)$.

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\; a \wedge b = c \wedge b,\; a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak z absorpčních zákonů a modulární rovnosti plyne

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že ve svazu G platí implikace (1). Zvolme libovolně trojici prvků $a, b, c \in G$ tak, že $c \leq a$, a označme $x = (a \wedge b) \vee c$, $y = a \wedge (b \vee c)$. Z modulární nerovnosti (věta 2.3) víme, že $x \leq y$.

Ekvivalentní podmínka modularity

Poznámka. Následující věta dává užitečné kriterium, jak ukázat, že daný svaz není modulární: stačí nalézt dva různé srovnatelné prvky mající se třetím prvkem stejná infima i suprema.

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \qquad (1)$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že svaz G je modulární a že pro trojici prvků $a, b, c \in G$ platí $c \leq a$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak z absorpčních zákonů a modulární rovnosti plyne

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee a) = a.$$

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že ve svazu G platí implikace (1). Zvolme libovolně trojici prvků $a, b, c \in G$ tak, že $c \leq a$, a označme $x = (a \wedge b) \vee c$, $y = a \wedge (b \vee c)$. Z modulární nerovnosti (věta 2.3) víme, že $x \leq y$. Ukážeme-li, že též platí $x \wedge b = y \wedge b$, $x \vee b = y \vee b$, podle implikace (1) dostaneme $x = y$, což je modulární rovnost pro prvky a, b, c.

Z $x \leq y$ plyne $x \vee b \leq y \vee b$, neboť z $y \vee b \geq y \geq x$, $y \vee b \geq b$ je jasné, že $y \vee b$ je horní závora prvků x, b.

Z $x \leq y$ plyne $x \vee b \leq y \vee b$, neboť z $y \vee b \geq y \geq x$, $y \vee b \geq b$ je jasné, že $y \vee b$ je horní závora prvků x, b. Z absorpčního zákona

$$x \vee b = ((a \wedge b) \vee c) \vee b = ((a \wedge b) \vee b) \vee c = b \vee c,$$

jistě $b \vee c \geq a \wedge (b \vee c) = y$ a $b \vee c \geq b$.

Z $x \leq y$ plyne $x \vee b \leq y \vee b$, neboť z $y \vee b \geq y \geq x$, $y \vee b \geq b$ je jasné, že $y \vee b$ je horní závora prvků x, b. Z absorpčního zákona

$$x \vee b = ((a \wedge b) \vee c) \vee b = ((a \wedge b) \vee b) \vee c = b \vee c,$$

jistě $b \vee c \geq a \wedge (b \vee c) = y$ a $b \vee c \geq b$. To pak znamená $x \vee b = b \vee c \geq y \vee b$, což spolu s dříve odvozenou opačnou nerovností dává $x \vee b = y \vee b$.

Z $x \leq y$ plyne $x \vee b \leq y \vee b$, neboť z $y \vee b \geq y \geq x$, $y \vee b \geq b$ je jasné, že $y \vee b$ je horní závora prvků x, b. Z absorpčního zákona

$$x \vee b = ((a \wedge b) \vee c) \vee b = ((a \wedge b) \vee b) \vee c = b \vee c,$$

jistě $b \vee c \geq a \wedge (b \vee c) = y$ a $b \vee c \geq b$. To pak znamená $x \vee b = b \vee c \geq y \vee b$, což spolu s dříve odvozenou opačnou nerovností dává $x \vee b = y \vee b$.
Analogicky z $x \leq y$ plyne $x \wedge b \leq y \wedge b$ a z absorpčního zákona

$$y \wedge b = (a \wedge (b \vee c)) \wedge b = a \wedge ((b \vee c) \wedge b) = a \wedge b.$$

Z $x \leq y$ plyne $x \vee b \leq y \vee b$, neboť z $y \vee b \geq y \geq x$, $y \vee b \geq b$ je jasné, že $y \vee b$ je horní závora prvků x, b. Z absorpčního zákona

$$x \vee b = ((a \wedge b) \vee c) \vee b = ((a \wedge b) \vee b) \vee c = b \vee c,$$

jistě $b \vee c \geq a \wedge (b \vee c) = y$ a $b \vee c \geq b$. To pak znamená $x \vee b = b \vee c \geq y \vee b$, což spolu s dříve odvozenou opačnou nerovností dává $x \vee b = y \vee b$.
Analogicky z $x \leq y$ plyne $x \wedge b \leq y \wedge b$ a z absorpčního zákona

$$y \wedge b = (a \wedge (b \vee c)) \wedge b = a \wedge ((b \vee c) \wedge b) = a \wedge b.$$

Jistě $a \wedge b \leq (a \wedge b) \vee c = x$, také $a \wedge b \leq b$, proto $y \wedge b = a \wedge b \leq x \wedge b$, opět s opačnou nerovností dostáváme potřebnou rovnost $x \wedge b = y \wedge b$.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace

$$a \geq c, \; a \wedge b = c \wedge b, \; a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

„$\Leftarrow$“ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \implies a = c.$$

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

„$\Leftarrow$“ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak podmnožina $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq G$ je podsvaz G, který není modulární podle věty 6.4.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c, \;\; a \wedge b = c \wedge b, \;\; a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

„$\Leftarrow$“ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak podmnožina $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq G$ je podsvaz G, který není modulární podle věty 6.4. Protože každý nejvýše čtyřprvkový svaz modulární je, jsou tyto prvky po dvou různé, proto je b nesrovnatelné s a i c.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

<u>Věta 6.4.</u> Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ *platí implikace*

$$a \geq c,\ \ a \wedge b = c \wedge b,\ \ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

<u>Věta 6.5.</u> Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 *(pětiúhelníkem).*
<u>Důkaz.</u> „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.
„$\Leftarrow$“ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak podmnožina $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq G$ je podsvaz G, který není modulární podle věty 6.4. Protože každý nejvýše čtyřprvkový svaz modulární je, jsou tyto prvky po dvou různé, proto je b nesrovnatelné s a i c. Tento podsvaz je tedy izomorfní s N_5.

Modulární svazy - charakterizace „zakázaným“ podsvazem

<u>*Věta 6.4.*</u> *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ \ a \wedge b = c \wedge b,\ \ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

<u>*Věta 6.5.*</u> *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

<u>*Důkaz.*</u> „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného modulárního svazu je modulární, což N_5 není.

„$\Leftarrow$“ Dle věty 6.4. existují $a, b, c \in G$ splňující $a > c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Pak podmnožina $\{a, b, c, a \wedge b, a \vee b\} \subseteq G$ je podsvaz G, který není modulární podle věty 6.4. Protože každý nejvýše čtyřprvkový svaz modulární je, jsou tyto prvky po dvou různé, proto je b nesrovnatelné s a i c. Tento podsvaz je tedy izomorfní s N_5.

<u>*Důsledek.*</u> *Duální svaz k modulárnímu svazu je opět modulární.*

Distributivní svazy - definice

V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Distributivní svazy - definice

V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá distributivní, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Distributivní svazy - definice

V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá distributivní, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Věta 7.1. *Nechť G je distributivní svaz. Pak pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí i následující distributivní rovnost*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c).$$

Distributivní svazy - definice

V libovolném svazu G pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní nerovnosti

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c),$$
$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c).$$

Definice. Svaz G se nazývá distributivní, jestliže pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí distributivní rovnost

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c).$$

Věta 7.1. *Nechť G je distributivní svaz. Pak pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí i následující distributivní rovnost*

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c).$$

Důkaz. Z distributivity a absorpčního zákona dostáváme

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) = \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) = \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c).\end{aligned}$$

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*

Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*

Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*

Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. *Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.*

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*
Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. *Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.*
Důkaz. V podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu.

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. *Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.*

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. *Každý distributivní svaz je modulární.*
Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. *Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.*
Důkaz. V podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu.

Věta 7.4. *Součin distributivních svazů je distributivní svaz.*

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. Každý distributivní svaz je modulární.
Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.
Důkaz. V podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu.

Věta 7.4. Součin distributivních svazů je distributivní svaz. Homomorfní obraz distributivního svazu je distributivní svaz.

Distributivní svazy - příklady a základní vastnosti

Důsledek. Duální svaz k distributivnímu svazu je opět distributivní.

Příklad. Svaz $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin libovolné množiny X je distributivní. Libovolný řetězec je distributivní.

Věta 7.2. Každý distributivní svaz je modulární.
Důkaz. Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ takové, že $c \leq a$. Pak platí modulární rovnost

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Příklad. Svaz N_5 (pětiúhelník) ani svaz M_5 (diamant) nejsou distributivní.

Věta 7.3. Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.
Důkaz. V podsvazu se suprema i infima počítají jako v původním svazu.

Věta 7.4. Součin distributivních svazů je distributivní svaz. Homomorfní obraz distributivního svazu je distributivní svaz.
Důkaz. Vlastnost „být distributivní" je definována rovností.

Distributivní svazy - ekvivalentní podmínka

Připomeňme:

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Distributivní svazy - ekvivalentní podmínka

Připomeňme:

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 7.5. *Svaz G je distributivní, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \tag{2}$$

Distributivní svazy - ekvivalentní podmínka

Připomeňme:

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c.$$

Věta 7.5. *Svaz G je distributivní, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \quad \Longrightarrow \quad a = c. \tag{2}$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ splňují $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$.

Distributivní svazy - ekvivalentní podmínka

Připomeňme:

Věta 6.4. *Svaz G je modulární, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \geq c,\ a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \implies a = c.$$

Věta 7.5. *Svaz G je distributivní, právě když pro každou trojici prvků $a, b, c \in G$ platí implikace*

$$a \wedge b = c \wedge b,\ a \vee b = c \vee b \implies a = c. \tag{2}$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť G je distributivní svaz, $a, b, c \in G$ splňují $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Z absorpčních zákonů a distributivity

$$c = (c \wedge b) \vee c = (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c) =$$
$$= (a \vee c) \wedge (a \vee b) = a \vee (c \wedge b) = a \vee (a \wedge b) = a.$$

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární.

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné.

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$.

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

Pomocí implikace (2) dostáváme $a = c$.

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$\begin{aligned} a &= \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big), \\ c &= \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee \big(z \wedge y\big)\big), \end{aligned}$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

Pomocí implikace (2) dostáváme $a = c$. Z $x \wedge y \leq x$ plyne

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = x \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y), \\ x \wedge c &= x \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)) = x \wedge (x \vee (z \wedge y)) \wedge (y \vee z) = \\ &= x \wedge (y \vee z). \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

Pomocí implikace (2) dostáváme $a = c$. Z $x \wedge y \leq x$ plyne

$$x \wedge a = x \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = x \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) =$$
$$= (x \wedge z) \vee (x \wedge y),$$
$$x \wedge c = x \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)) = x \wedge (x \vee (z \wedge y)) \wedge (y \vee z) =$$
$$= x \wedge (y \vee z).$$

Celkem tedy $x \wedge (y \vee z) = x \wedge c = x \wedge a = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

„$\Leftarrow$“ Z (2) plyne (1), tedy podle věty 6.4 je G modulární. Nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Označme $b = y$,

$$a = \big((y \vee x) \wedge z\big) \vee (x \wedge y) = (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big),$$
$$c = \big((y \vee z) \wedge x\big) \vee (z \wedge y) = (y \vee z) \wedge \big(x \vee (z \wedge y)\big),$$

tedy při záměně $x \leftrightarrow z$ se zamění $a \leftrightarrow c$. Protože $x \wedge y \leq y$, máme

$$a \wedge b = y \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = y \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = (y \wedge z) \vee (x \wedge y) = c \wedge b.$$

Podobně z $y \leq y \vee x$ plyne

$$a \vee b = ((y \vee x) \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee y = ((y \vee x) \wedge z) \vee y = (y \vee x) \wedge (z \vee y) = c \vee b.$$

Pomocí implikace (2) dostáváme $a = c$. Z $x \wedge y \leq x$ plyne

$$\begin{aligned} x \wedge a &= x \wedge (y \vee x) \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = x \wedge \big(z \vee (x \wedge y)\big) = \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y), \\ x \wedge c &= x \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee (z \wedge y)) = x \wedge (x \vee (z \wedge y)) \wedge (y \vee z) = \\ &= x \wedge (y \vee z). \end{aligned}$$

Celkem tedy $x \wedge (y \vee z) = x \wedge c = x \wedge a = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
Protože $x, y, z \in G$ byly libovolné, je G distributivní svaz.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Věta 7.6. *Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).*

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).

Důsledek. Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).

Důsledek. Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Věta 7.6. *Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).*

Důsledek. *Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.
„$\Leftarrow$“ Nechť modulární svaz G není distributivní.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).

Důsledek. Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.
„$\Leftarrow$“ Nechť modulární svaz G není distributivní. Podle předchozí věty 7.5 existují $a, b, c \in G$ tak, že $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).

Důsledek. Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.
„$\Leftarrow$“ Nechť modulární svaz G není distributivní. Podle předchozí věty 7.5 existují $a, b, c \in G$ tak, že $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Podle věty 6.4 jsou a, c nesrovnatelné.

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Věta 7.6. Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).

Důsledek. Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.
„$\Leftarrow$“ Nechť modulární svaz G není distributivní. Podle předchozí věty 7.5 existují $a, b, c \in G$ tak, že $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Podle věty 6.4 jsou a, c nesrovnatelné. Označme

$$m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c).$$

Distributivní svazy - charakterizace „zakázanými“ podsvazy

Připomeňme:

Věta 6.5. *Svaz G je modulární, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Věta 7.6. *Modulární svaz G je distributivní, právě když neobsahuje podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem).*

Důsledek. *Svaz G je distributivní, právě když neobsahuje ani podsvaz izomorfní se svazem M_5 (diamantem) ani podsvaz izomorfní se svazem N_5 (pětiúhelníkem).*

Důkaz věty 7.6. „$\Rightarrow$“ Každý podsvaz libovolného distributivního svazu je distributivní, což M_5 není.
„$\Leftarrow$“ Nechť modulární svaz G není distributivní. Podle předchozí věty 7.5 existují $a, b, c \in G$ tak, že $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$. Podle věty 6.4 jsou a, c nesrovnatelné. Označme

$$m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c).$$

Z modularity (díky $a \wedge c \leq a \leq a \vee c$) plyne

$$m = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big).$$

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$,
neboť $a \leq a \vee c$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$, neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$, neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$, neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Dualizací předchozího výpočtu $m \wedge a = a \wedge c = m \wedge c$.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$,
neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Dualizací předchozího výpočtu $m \wedge a = a \wedge c = m \wedge c$.

Proto $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ je podsvaz svazu G, který podle věty 7.5 není distributivní.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity
$m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$,
neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Dualizací předchozího výpočtu $m \wedge a = a \wedge c = m \wedge c$.

Proto $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ je podsvaz svazu G, který podle věty 7.5 není distributivní.

Snadno se ověří, že všechny nejvýše pětiprvkové modulární svazy jsou distributivní s výjimkou těch, které jsou izomorfní s M_5.

Máme tedy v modulárním svazu G prvky $a \neq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$, $m = \big((a \vee c) \wedge b\big) \vee (a \wedge c) = (a \vee c) \wedge \big(b \vee (a \wedge c)\big)$. Prvky a, c zde vystupují symetricky, prvek m se nezmění při záměně $a \leftrightarrow c$.

Pak z modularity $m \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee a = ((a \vee c) \wedge b) \vee a = (a \vee c) \wedge (b \vee a)$, neboť $a \leq a \vee c$. Protože $b \vee a$ je horní závora b, c, je $b \vee a \geq a \vee c$, odkud $m \vee a = a \vee c$.

Záměnou $a \leftrightarrow c$ dostáváme, že $m \vee c = a \vee c$.

Dualizací předchozího výpočtu $m \wedge a = a \wedge c = m \wedge c$.

Proto $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ je podsvaz svazu G, který podle věty 7.5 není distributivní.

Snadno se ověří, že všechny nejvýše pětiprvkové modulární svazy jsou distributivní s výjimkou těch, které jsou izomorfní s M_5.

Proto je podsvaz $\{a, c, m, a \vee c, a \wedge c\}$ izomorfní s M_5.

$\vee$-nedosažitelnost

Definice. Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

$\vee$-nedosažitelnost

Definice. Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

Poznámka. Prvek a svazu G je tedy $\vee$-nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

$\vee$-nedosažitelnost

<u>*Definice.*</u> Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

<u>*Poznámka.*</u> Prvek a svazu G je tedy $\vee$-nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Ekvivalentně: prvek a svazu G je $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$.

$\vee$-nedosažitelnost

<u>Definice.</u> Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

<u>Poznámka.</u> Prvek a svazu G je tedy $\vee$-nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Ekvivalentně: prvek a svazu G je $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$.

Odtud indukcí: $\vee$-nedosažitelný prvek není supremem ani žádné neprázdné konečné množiny prvků ostře menších než on.

$\vee$-nedosažitelnost

Definice. Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

Poznámka. Prvek a svazu G je tedy $\vee$-nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Ekvivalentně: prvek a svazu G je $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$.

Odtud indukcí: $\vee$-nedosažitelný prvek není supremem ani žádné neprázdné konečné množiny prvků ostře menších než on.

Označení. Množinu všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G označíme $J(G)$.

$\vee$-nedosažitelnost

Definice. Prvek a svazu G se nazývá $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $a = b \vee c$, platí $a = b$ nebo $a = c$.

Poznámka. Prvek a svazu G je tedy $\vee$-nedosažitelný, jestliže neexistují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Ekvivalentně: prvek a svazu G je $\vee$-nedosažitelný, jestliže pro každé $b, c \in G$ takové, že $b < a$ a současně $c < a$, platí $b \vee c < a$.

Odtud indukcí: $\vee$-nedosažitelný prvek není supremem ani žádné neprázdné konečné množiny prvků ostře menších než on.

Označení. Množinu všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G označíme $J(G)$.

Věta 7.7. V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a{\downarrow} \cap J(G)).$$

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a{\downarrow} \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a\!\downarrow \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a\!\downarrow \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a{\downarrow} \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a{\downarrow} \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.

<u>Věta 7.7.</u> V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a\!\downarrow \cap J(G)).$$

<u>Důkaz.</u> Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a\!\downarrow \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.
Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a\!\downarrow \cap J(G)$, tedy i supremem.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a\downarrow \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a\downarrow \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.
Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a\downarrow \cap J(G)$, tedy i supremem.
Nechť tedy $a \notin J(G)$, pak existují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a\!\downarrow \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a\!\downarrow \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.
Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a\!\downarrow \cap J(G)$, tedy i supremem.
Nechť tedy $a \notin J(G)$, pak existují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$. Zřejmě oba prvky splňují indukční předpoklad, tedy

$$\begin{aligned} a &= b \vee c = \sup(b\!\downarrow \cap J(G)) \vee \sup(c\!\downarrow \cap J(G)) = \\ &= \sup\big((b\!\downarrow \cap J(G)) \cup (c\!\downarrow \cap J(G))\big) = \sup\big((b\!\downarrow \cup\, c\!\downarrow) \cap J(G)\big) \leq \\ &\leq \sup(a\!\downarrow \cap J(G)), \end{aligned}$$

protože $(b\!\downarrow \cup\, c\!\downarrow) \cap J(G) \subseteq a\!\downarrow \cap J(G)$.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a{\downarrow} \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a{\downarrow} \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.
Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a{\downarrow} \cap J(G)$, tedy i supremem.
Nechť tedy $a \notin J(G)$, pak existují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$. Zřejmě oba prvky splňují indukční předpoklad, tedy

$$\begin{aligned} a = b \vee c = \sup(b{\downarrow} \cap J(G)) \vee \sup(c{\downarrow} \cap J(G)) = \\ = \sup\big((b{\downarrow} \cap J(G)) \cup (c{\downarrow} \cap J(G))\big) = \sup\big((b{\downarrow} \cup c{\downarrow}) \cap J(G)\big) \leq \\ \leq \sup(a{\downarrow} \cap J(G)), \end{aligned}$$

protože $(b{\downarrow} \cup c{\downarrow}) \cap J(G) \subseteq a{\downarrow} \cap J(G)$. Ovšem $\sup(a{\downarrow} \cap J(G)) \leq a$, protože a je horní závora množiny $a{\downarrow} \cap J(G)$.

Věta 7.7. *V konečném svazu G je libovolný prvek a roven supremu množiny všech $\vee$-nedosažitelných prvků, které neostře převyšuje, tj.*

$$a = \sup\{b \in J(G) \mid b \leq a\} = \sup(a{\downarrow} \cap J(G)).$$

Důkaz. Indukcí vzhledem k počtu m prvků svazu G menších než a.
I. krok. Je-li $m = 0$, je a nejmenší prvek svazu G, který je $\vee$-nedosažitelný, proto $\{a\} = a{\downarrow} \cap J(G)$, a tedy tvrzení pro a platí.
II. krok. Předpokládejme tedy, že $m > 0$ a že pro všechny prvky, které převyšující v G méně než m prvků, byla již věta dokázána.
Nechť $a \in G$ je libovolný. Pokud $a \in J(G)$, zřejmě je a největším prvkem množiny $a{\downarrow} \cap J(G)$, tedy i supremem.
Nechť tedy $a \notin J(G)$, pak existují $b, c \in G$ splňující $b < a$, $c < a$, $a = b \vee c$. Zřejmě oba prvky splňují indukční předpoklad, tedy

$$\begin{aligned} a &= b \vee c = \sup(b{\downarrow} \cap J(G)) \vee \sup(c{\downarrow} \cap J(G)) = \\ &= \sup\big((b{\downarrow} \cap J(G)) \cup (c{\downarrow} \cap J(G))\big) = \sup\big((b{\downarrow} \cup c{\downarrow}) \cap J(G)\big) \leq \\ &\leq \sup(a{\downarrow} \cap J(G)), \end{aligned}$$

protože $(b{\downarrow} \cup c{\downarrow}) \cap J(G) \subseteq a{\downarrow} \cap J(G)$. Ovšem $\sup(a{\downarrow} \cap J(G)) \leq a$, protože a je horní závora množiny $a{\downarrow} \cap J(G)$. Dohromady rovnost.

Konečné distributivní svazy

Definice. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Konečné distributivní svazy

Definice. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Poznámka. Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A, které jsou ještě menší.

Konečné distributivní svazy

Definice. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Poznámka. Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A, které jsou ještě menší. Pomocí této vlastnosti můžeme charakterizovat ideály svazu: jsou to právě dědičné podsvazy.

Konečné distributivní svazy

Definice. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Poznámka. Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A, které jsou ještě menší. Pomocí této vlastnosti můžeme charakterizovat ideály svazu: jsou to právě dědičné podsvazy.

Označení. Množinu všech *neprázdných* dědičných podmnožin uspořádané množiny A značíme $D(A)$.

Konečné distributivní svazy

Definice. Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina. Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá dědičná (někdy pro zdůraznění říkáme *dolů dědičná*), pokud pro každý prvek $b \in B$ a každý $a \in A$, $a \leq b$, platí $a \in B$.

Poznámka. Množina $B \subseteq A$ je tedy dědičná, jestliže s každým svým prvkem obsahuje všechny prvky množiny A, které jsou ještě menší. Pomocí této vlastnosti můžeme charakterizovat ideály svazu: jsou to právě dědičné podsvazy.

Označení. Množinu všech *neprázdných* dědičných podmnožin uspořádané množiny A značíme $D(A)$.

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí.

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \to D(J(G))$ předpisem $\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.

<u>Důkaz.</u> Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \to D(J(G))$ předpisem
$\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.
Zřejmě $a{\downarrow}$ je dědičná množina v G, proto její průnik s $J(G)$ je dědičnou množinou v $J(G)$.

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \to D(J(G))$ předpisem $\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.
Zřejmě $a{\downarrow}$ je dědičná množina v G, proto její průnik s $J(G)$ je dědičnou množinou v $J(G)$. Navíc $a{\downarrow} \cap J(G)$ obsahuje nejmenší prvek svazu G, a tedy je prvkem $D(J(G))$.

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \to D(J(G))$ předpisem $\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.
Zřejmě $a{\downarrow}$ je dědičná množina v G, proto její průnik s $J(G)$ je dědičnou množinou v $J(G)$. Navíc $a{\downarrow} \cap J(G)$ obsahuje nejmenší prvek svazu G, a tedy je prvkem $D(J(G))$.

Ukažme, že η je izotonní zobrazení: nechť $a, b \in G$ splňují $a \leq b$, pak $a{\downarrow} \subseteq b{\downarrow}$, tedy $\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G) \subseteq b{\downarrow} \cap J(G) = \eta(b)$.

Důkaz. Je-li G prázdný svaz, je i $D(J(G))$ prázdná množina a věta platí. Dále předpokládejme, že G je neprázdný.

Definujme zobrazení $\eta : G \to D(J(G))$ předpisem
$\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G)$ pro libovolné $a \in G$.
Zřejmě $a{\downarrow}$ je dědičná množina v G, proto její průnik s $J(G)$ je dědičnou množinou v $J(G)$. Navíc $a{\downarrow} \cap J(G)$ obsahuje nejmenší prvek svazu G, a tedy je prvkem $D(J(G))$.

Ukažme, že η je izotonní zobrazení: nechť $a, b \in G$ splňují $a \leq b$, pak $a{\downarrow} \subseteq b{\downarrow}$, tedy $\eta(a) = a{\downarrow} \cap J(G) \subseteq b{\downarrow} \cap J(G) = \eta(b)$.

Podle věty 7.7 pro každé $a \in G$ platí $a = \sup \eta(a)$, je tedy η injektivní: jestliže pro $a, b \in G$ platí $\eta(a) = \eta(b)$, pak
$a = \sup \eta(a) = \sup \eta(b) = b$.

Ukažme, že je také η surjektivní.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\!\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \ldots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \dots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \ldots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \dots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \dots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \dots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Je tedy η izotonní bijekce.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \ldots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Je tedy η izotonní bijekce. Zbývá ukázat, že i inverzní zobrazení η^{-1} je izotonní.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \dots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a{\downarrow}$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \dots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Je tedy η izotonní bijekce. Zbývá ukázat, že i inverzní zobrazení η^{-1} je izotonní. Nechť $a, b \in G$ jsou takové, že $\eta(a) \subseteq \eta(b)$.

Ukažme, že je také η surjektivní. Zvolme libovolně $X \in D(J(G))$, tedy X je neprázdná dědičná podmnožina $J(G)$. Pišme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Chceme najít $a \in G$ tak, aby $\eta(a) = X$.

Položme $a = x_1 \vee \cdots \vee x_n = \sup X$, pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí $a \geq x_i$, tedy $x_i \in a\!\downarrow$. Protože také $x_i \in J(G)$, je $x_i \in \eta(a)$. Dokázali jsme $X \subseteq \eta(a)$. Dokažme nyní opačnou inkluzi: zvolme libovolně $y \in \eta(a)$. Pak $y \in J(G)$ a $y \leq a$. Proto z distributivity

$$y = y \wedge a = y \wedge (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = (y \wedge x_1) \vee \cdots \vee (y \wedge x_n).$$

Ovšem y je $\vee$-nedosažitelný, a tedy nemůže být supremem menších prvků. Existuje tedy $i \in \{1 \ldots n\}$ tak, že $y = y \wedge x_i$, což znamená, že $y \leq x_i$. Ovšem $x_i \in X$, která je dědičná, tedy $y \in X$, tedy $\eta(a) \subseteq X$. Dohromady $\eta(a) = X$.

Je tedy η izotonní bijekce. Zbývá ukázat, že i inverzní zobrazení η^{-1} je izotonní. Nechť $a, b \in G$ jsou takové, že $\eta(a) \subseteq \eta(b)$. Pak podle věty 7.7 platí $a = \sup \eta(a) \leq \sup \eta(b) = b$.

Charakterizace konečných distributivních svazů

Věta 7.8. *Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).*

Charakterizace konečných distributivních svazů

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důsledek. Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.

Charakterizace konečných distributivních svazů

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důsledek. Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.

Důkaz. Zřejmě sjednocení i průnik neprázdných dědičných podmnožin je opět neprázdná dědičná podmnožina (průnik je neprázdný, protože obsahuje nejmenší prvek svazu).

Charakterizace konečných distributivních svazů

Věta 7.8. Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).

Důsledek. Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.

Důkaz. Zřejmě sjednocení i průnik neprázdných dědičných podmnožin je opět neprázdná dědičná podmnožina (průnik je neprázdný, protože obsahuje nejmenší prvek svazu).
Proto jsou operacemi suprema a infima ve svazu $D(J(G))$ právě množinový průnik a sjednocení.

Charakterizace konečných distributivních svazů

<u>*Věta 7.8.*</u> *Pro konečný distributivní svaz G uvažme uspořádanou množinu $(J(G), \leq)$, tj. množinu $J(G)$ všech $\vee$-nedosažitelných prvků svazu G spolu s uspořádáním $\leq$, které na $J(G)$ indukuje uspořádání svazu G. Pak uspořádaná množina $(D(J(G)), \subseteq)$ je izomorfní se svazem G (chápaným jako uspořádaná množina).*

<u>*Důsledek.*</u> *Každý konečný distributivní svaz je izomorfní s některým podsvazem svazu všech podmnožin nějaké konečné množiny.*

<u>*Důkaz.*</u> Zřejmě sjednocení i průnik neprázdných dědičných podmnožin je opět neprázdná dědičná podmnožina (průnik je neprázdný, protože obsahuje nejmenší prvek svazu).
Proto jsou operacemi suprema a infima ve svazu $D(J(G))$ právě množinový průnik a sjednocení.
Je tedy $(D(J(G)), \subseteq)$ podsvazem svazu $(\mathcal{P}(J(G)), \subseteq)$ všech podmnožin množiny $J(G)$.

Komplementární svazy

<u>Definice.</u> Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$.

Komplementární svazy

Definice. Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvku existuje aspoň jeden komplement.

Komplementární svazy

Definice. Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvku existuje aspoň jeden komplement.

Poznámka. Z komutativity obou operací plyne, že je-li prvek b komplementem prvku a, pak je prvek a komplementem prvku b.

Komplementární svazy

Definice. Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvku existuje aspoň jeden komplement.

Poznámka. Z komutativity obou operací plyne, že je-li prvek b komplementem prvku a, pak je prvek a komplementem prvku b.

Příklad. Svazy M_5 (diamant) a N_5 (pětiúhelník) jsou komplementární, avšak k některým prvkům existuje komplementů více než jeden.

Komplementární svazy

Definice. Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvku existuje aspoň jeden komplement.

Poznámka. Z komutativity obou operací plyne, že je-li prvek b komplementem prvku a, pak je prvek a komplementem prvku b.

Příklad. Svazy M_5 (diamant) a N_5 (pětiúhelník) jsou komplementární, avšak k některým prvkům existuje komplementů více než jeden.

Příklad. Řetězec mající aspoň tři prvky není komplementární.

Komplementární svazy

Definice. Nechť G je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. Řekneme, že prvek $b \in G$ je komplementem prvku $a \in G$ ve svazu G, jestliže platí $a \wedge b = 0$, $a \vee b = 1$. Svaz G se nazývá komplementární, jestliže ke každému prvku existuje aspoň jeden komplement.

Poznámka. Z komutativity obou operací plyne, že je-li prvek b komplementem prvku a, pak je prvek a komplementem prvku b.

Příklad. Svazy M_5 (diamant) a N_5 (pětiúhelník) jsou komplementární, avšak k některým prvkům existuje komplementů více než jeden.

Příklad. Řetězec mající aspoň tři prvky není komplementární.

Poznámka. Podsvaz komplementárního svazu nemusí být komplementární: komplementární svaz N_5 (pětiúhelník) obsahuje čtyřprvkový řetězec jako podsvaz.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*
Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*
Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*

Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1, 1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*

Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1, 1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g, h) \wedge (g_1, h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0, 0),$$
$$(g, h) \vee (g_1, h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1, 1),$$

a tedy (g_1, h_1) je komplementem prvku (g, h) ve svazu $G \times H$.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*

Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g,h) \wedge (0,0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0,0)$, je $(0,0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1,1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g,h) \wedge (g_1,h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0,0),$$
$$(g,h) \vee (g_1,h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1,1),$$

a tedy (g_1,h_1) je komplementem prvku (g,h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.1. Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.

Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1, 1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g, h) \wedge (g_1, h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0, 0),$$
$$(g, h) \vee (g_1, h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1, 1),$$

a tedy (g_1, h_1) je komplementem prvku (g, h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.2. V distributivním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*
Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g, h) \wedge (0, 0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0, 0)$, je $(0, 0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1, 1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g, h) \wedge (g_1, h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0, 0),$$
$$(g, h) \vee (g_1, h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1, 1),$$

a tedy (g_1, h_1) je komplementem prvku (g, h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.2. *V distributivním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.*
Důkaz. Nechť a_1, a_2 jsou komplementy prvku b.

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*
Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g,h) \wedge (0,0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0,0)$, je $(0,0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1,1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g,h) \wedge (g_1,h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0,0),$$
$$(g,h) \vee (g_1,h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1,1),$$

a tedy (g_1,h_1) je komplementem prvku (g,h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.2. *V distributivním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.*
Důkaz. Nechť a_1, a_2 jsou komplementy prvku b. Pak platí

$$a_1 \wedge b = 0 = a_2 \wedge b, \qquad a_1 \vee b = 1 = a_2 \vee b.$$

Věta 8.1. *Součin komplementárních svazů je komplementární svaz.*
Důkaz. Nechť G a H jsou komplementární svazy, uvažme jejich součin $G \times H$. Protože pro každé $g \in G$, $h \in H$ platí $(g,h) \wedge (0,0) = (g \wedge 0, h \wedge 0) = (0,0)$, je $(0,0)$ nejmenším prvkem svazu $G \times H$. Podobně se ověří, že $(1,1)$ je největším prvkem svazu $G \times H$. Pak pro libovolný komplement g_1 prvku g ve svazu G a pro libovolný komplement h_1 prvku h ve svazu H platí

$$(g,h) \wedge (g_1,h_1) = (g \wedge g_1, h \wedge h_1) = (0,0),$$
$$(g,h) \vee (g_1,h_1) = (g \vee g_1, h \vee h_1) = (1,1),$$

a tedy (g_1,h_1) je komplementem prvku (g,h) ve svazu $G \times H$.

Poznámka. Duální svaz ke komplementárnímu svazu je komplementární (komplementy se zachovávají).

Věta 8.2. *V distributivním svazu je komplement prvku, pokud existuje, určen jednoznačně.*
Důkaz. Nechť a_1, a_2 jsou komplementy prvku b. Pak platí

$$a_1 \wedge b = 0 = a_2 \wedge b, \qquad a_1 \vee b = 1 = a_2 \vee b.$$

Podle věty 7.5 odtud plyne $a_1 = a_2$.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Poznámka. Duální svaz k Booleově algebře je Booleova algebra (komplementy se zachovávají, 0 a 1 se v dualitě vymění).

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Poznámka. Duální svaz k Booleově algebře je Booleova algebra (komplementy se zachovávají, 0 a 1 se v dualitě vymění).

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ Booleova algebra (uspořádáním je množinová inkluze): nejmenší prvek je $\emptyset$, největší prvek je X a komplementem prvku $A \subseteq X$ je prvek $X - A$.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Poznámka. Duální svaz k Booleově algebře je Booleova algebra (komplementy se zachovávají, 0 a 1 se v dualitě vymění).

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ Booleova algebra (uspořádáním je množinová inkluze): nejmenší prvek je $\emptyset$, největší prvek je X a komplementem prvku $A \subseteq X$ je prvek $X - A$.

Věta 8.3. Součinem Booleových algeber je Booleova algebra.

Booleovy algebry

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Příklad. Prázdný svaz není Booleova algebra.

Poznámka. Nejmenší prvek Booleovy algebry budeme v dalším textu vždy značit 0 a její největší prvek 1. Komplement prvku $a \in G$ je dle předchozí věty určen jednoznačně, značíme jej a'.

Příklad. V libovolné Booleově algebře platí $0' = 1$, $1' = 0$.

Poznámka. Duální svaz k Booleově algebře je Booleova algebra (komplementy se zachovávají, 0 a 1 se v dualitě vymění).

Příklad. Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ Booleova algebra (uspořádáním je množinová inkluze): nejmenší prvek je $\emptyset$, největší prvek je X a komplementem prvku $A \subseteq X$ je prvek $X - A$.

Věta 8.3. Součinem Booleových algeber je Booleova algebra.

Důkaz. Plyne z vět 7.4 a 8.1.

De Morganovy zákony

Věta 8.4. *V libovolné Booleově algebře pro každé prvky a, b platí*

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

De Morganovy zákony

Věta 8.4. *V libovolné Booleově algebře pro každé prvky* a, b *platí*

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Důkaz. Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a', z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$.

De Morganovy zákony

Věta 8.4. *V libovolné Booleově algebře pro každé prvky a, b platí*

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Důkaz. Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a', z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$. Druhou rovnost odvodíme z distributivity:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') = \\ &= ((a \vee a') \vee b) \wedge ((b' \vee b) \vee a) = \\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

De Morganovy zákony

<u>Věta 8.4.</u> V libovolné Booleově algebře pro každé prvky a, b platí

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

<u>Důkaz.</u> Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a', z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$. Druhou rovnost odvodíme z distributivity:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') = \\ &= ((a \vee a') \vee b) \wedge ((b' \vee b) \vee a) = \\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') &= (a \wedge (a' \wedge b')) \vee (b \wedge (a' \wedge b')) = \\ &= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a') = \\ &= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

De Morganovy zákony

Věta 8.4. *V libovolné Booleově algebře pro každé prvky a, b platí*

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Důkaz. Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a', z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$. Druhou rovnost odvodíme z distributivity:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') = \\ &= ((a \vee a') \vee b) \wedge ((b' \vee b) \vee a) = \\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') &= (a \wedge (a' \wedge b')) \vee (b \wedge (a' \wedge b')) = \\ &= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a') = \\ &= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Je tedy $a' \wedge b'$ komplementem prvku $a \vee b$, což jsme chtěli ukázat.

De Morganovy zákony

Věta 8.4. *V libovolné Booleově algebře pro každé prvky* a, b *platí*

1. $a'' = a$,
2. $(a \vee b)' = a' \wedge b'$,
3. $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.

Důkaz. Prvky a'' i a jsou komplementy prvku a', z jednoznačnosti komplementu $a'' = a$. Druhou rovnost odvodíme z distributivity:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \vee (a' \wedge b') &= ((a \vee b) \vee a') \wedge ((a \vee b) \vee b') = \\ &= ((a \vee a') \vee b) \wedge ((b' \vee b) \vee a) = \\ &= (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1,\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') &= (a \wedge (a' \wedge b')) \vee (b \wedge (a' \wedge b')) = \\ &= ((a \wedge a') \wedge b') \vee ((b \wedge b') \wedge a') = \\ &= (0 \wedge b') \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Je tedy $a' \wedge b'$ komplementem prvku $a \vee b$, což jsme chtěli ukázat. Třetí rovnost dostaneme z druhé užitím duality.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$$Y = \{A \subseteq X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$$

je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$$Y = \{A \subseteq X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$$

je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Věta 8.5. *Libovolná Booleova podalgebra je Booleova algebra.*

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$$Y = \{A \subseteq X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$$

je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Věta 8.5. Libovolná Booleova podalgebra je Booleova algebra.

Důkaz. Jakožto podsvaz distributivního svazu je Booleova podalgebra distributivní svaz.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$$Y = \{A \subseteq X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$$

je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Věta 8.5. *Libovolná Booleova podalgebra je Booleova algebra.*

Důkaz. Jakožto podsvaz distributivního svazu je Booleova podalgebra distributivní svaz. Protože nejmenší (resp. největší) prvek Booleovy podalgebry je nejmenším (resp. největším) prvkem celé Booleovy algebry, z toho, že operace $\vee$ a $\wedge$ se v podsvazu počítají stejně jako v celém svazu, plyne, že komplement daného prvku v Booleově podalgebře je stejný jako komplement tohoto prvku v celé Booleově algebře.

Booleovy podalgebry Booleovy algebry

Definice. Podsvaz L Booleovy algebry G se nazývá Booleova podalgebra, jestliže $0, 1 \in L$ a pro každé $a \in L$ platí $a' \in L$.

Příklad. V libovolné Booleově algebře B tvoří $\{0, 1\}$ Booleovu podalgebru. Pro každý $a \in B$ je $\{0, 1, a, a'\}$ Booleova podalgebra.

Příklad. Je-li X nekonečná množina, pak

$$Y = \{A \subseteq X;\ A \text{ je konečná nebo } X - A \text{ je konečná}\}$$

je Booleova podalgebra Booleovy algebry $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$.

Věta 8.5. *Libovolná Booleova podalgebra je Booleova algebra.*

Důkaz. Jakožto podsvaz distributivního svazu je Booleova podalgebra distributivní svaz. Protože nejmenší (resp. největší) prvek Booleovy podalgebry je nejmenším (resp. největším) prvkem celé Booleovy algebry, z toho, že operace $\vee$ a $\wedge$ se v podsvazu počítají stejně jako v celém svazu, plyne, že komplement daného prvku v Booleově podalgebře je stejný jako komplement tohoto prvku v celé Booleově algebře. Je tedy Booleova podalgebra komplementární svaz, což jsme měli dokázat.

Homomorfismy Booleových algeber

<u>*Definice.*</u> Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$.

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Homomorfismy Booleových algeber

<u>*Definice.*</u> Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.
Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \to H$.

Homomorfismy Booleových algeber

<u>Definice.</u> Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.
Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \to H$.

<u>Věta 8.6.</u> Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus Booleových algeber, $a \in G$.

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.
Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \to H$.

Věta 8.6. Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus Booleových algeber, $a \in G$. Pak platí $f(a') = f(a)'$.

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.
Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.
Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \to H$.

Věta 8.6. Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus Booleových algeber, $a \in G$. Pak platí $f(a') = f(a)'$.

Důkaz. Jistě platí

$$f(a') \vee f(a) = f(a' \vee a) = f(1) = 1,$$
$$f(a') \wedge f(a) = f(a' \wedge a) = f(0) = 0.$$

Homomorfismy Booleových algeber

Definice. Mějme Booleovy algebry G a H a zobrazení $f : G \to H$. Řekneme, že je f homomorfismus Booleových algeber, je-li f svazový homomorfismus, pro který platí $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Řekneme, že f je izomorfismus Booleových algeber, je-li f bijektivní homomorfismus Booleových algeber.
Booleovy algebry G a H nazveme izomorfní, jestliže existuje izomorfismus Booleových algeber $f : G \to H$.

Věta 8.6. *Nechť $f : G \to H$ je homomorfismus Booleových algeber, $a \in G$. Pak platí $f(a') = f(a)'$.*
Důkaz. Jistě platí

$$f(a') \vee f(a) = f(a' \vee a) = f(1) = 1,$$
$$f(a') \wedge f(a) = f(a' \wedge a) = f(0) = 0.$$

Odtud plyne, že $f(a)$ je komplementem prvku $f(a')$ v Booleově algebře H.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.
Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.
Důkaz. Užijeme větu 7.8.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže $\vee$-nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0, existuje $y \in G$, že $0 < y < x$.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže $\vee$-nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0, existuje $y \in G$, že $0 < y < x$. Pak $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže $\vee$-nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0, existuje $y \in G$, že $0 < y < x$. Pak $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$. Ze $\vee$-nedosažitelnosti x plyne $x = x \wedge y'$, tj. $x \leq y'$, odkud $y < y'$, tedy $y = y \wedge y' = 0$, spor.

Konečné Booleovy algebry

<u>Definice.</u> Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

<u>Věta 8.7.</u> Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

<u>Důkaz.</u> Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže $\vee$-nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0, existuje $y \in G$, že $0 < y < x$. Pak $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$. Ze $\vee$-nedosažitelnosti x plyne $x = x \wedge y'$, tj. $x \leq y'$, odkud $y < y'$, tedy $y = y \wedge y' = 0$, spor.

Ukázali jsme, že $J(G) = A \cup \{0\}$, a protože libovolné dva různé atomy jsou nesrovnatelné, je $D(J(G)) = \{M \subseteq A \cup \{0\} \mid 0 \in M\}$.

Konečné Booleovy algebry

Definice. Nechť G je Booleova algebra, $a \in G$, $a \neq 0$. Řekneme, že a je atom Booleovy algebry G, jestliže kromě 0 neexistuje žádný jiný prvek Booleovy algebry G menší než a.

Věta 8.7. Nechť G je konečná Booleova algebra, A množina všech jejích atomů. Pak G je izomorfní s Booleovou algebrou $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

Důkaz. Užijeme větu 7.8. Každý atom je $\vee$-nedosažitelný, stejně jako prvek 0. Ukážeme, že jiné $\vee$-nedosažitelné prvky G nemá. Jestliže $\vee$-nedosažitelný prvek $x \in G$ není atom ani 0, existuje $y \in G$, že $0 < y < x$. Pak $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y') = (x \wedge y) \vee (x \wedge y')$. Ze $\vee$-nedosažitelnosti x plyne $x = x \wedge y'$, tj. $x \leq y'$, odkud $y < y'$, tedy $y = y \wedge y' = 0$, spor.

Ukázali jsme, že $J(G) = A \cup \{0\}$, a protože libovolné dva různé atomy jsou nesrovnatelné, je $D(J(G)) = \{M \subseteq A \cup \{0\} \mid 0 \in M\}$. Zřejmě zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \to D(J(G))$ určené předpisem $f(M) = M \cup \{0\}$ je izomorfismus uspořádaných množin, tedy i svazů, a věta plyne z věty 7.8.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Věta 9.1. Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.

Booleovy okruhy

<u>*Definice.*</u> Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

<u>*Příklad.*</u> Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

<u>*Věta 9.1.*</u> *Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.*

<u>*Důkaz.*</u> Z idempotentnosti plyne
$1 + 1 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Věta 9.1. *Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.*

Důkaz. Z idempotentnosti plyne
$1 + 1 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$
Přičtením $-(1 + 1)$ dostaneme $1 + 1 = 0$.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Věta 9.1. *Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.*

Důkaz. Z idempotentnosti plyne
$1 + 1 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$
Přičtením $-(1 + 1)$ dostaneme $1 + 1 = 0$. Protože okruh není triviální, platí $1 \neq 0$, a tedy má charakteristiku 2.

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Věta 9.1. Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.

Důkaz. Z idempotentnosti plyne
$1 + 1 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$
Přičtením $-(1 + 1)$ dostaneme $1 + 1 = 0$. Protože okruh není triviální, platí $1 \neq 0$, a tedy má charakteristiku 2.
Opět z idempotentnosti pro libovolné $x, y \in R$ dostáváme
$x+y = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y = x+x\cdot y+y\cdot x+y,$

Booleovy okruhy

Definice. Okruh $(R, +, \cdot)$ se nazývá Booleův okruh, je-li idempotentní, tj. pro každé $x \in R$ platí $x \cdot x = x$.

Příklad. Pro libovolnou množinu X tvoří $(\mathcal{P}(X), \div, \cap)$, kde $\div$ značí symetrický rozdíl množin, tj. $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$, Booleův okruh. Důkaz zanedlouho uvidíme, je to speciální příklad věty 9.2.

Věta 9.1. Netriviální Booleův okruh je komutativní okruh charakteristiky 2.

Důkaz. Z idempotentnosti plyne
$1 + 1 = (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$
Přičtením $-(1 + 1)$ dostaneme $1 + 1 = 0$. Protože okruh není triviální, platí $1 \neq 0$, a tedy má charakteristiku 2.
Opět z idempotentnosti pro libovolné $x, y \in R$ dostáváme
$x+y = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x+x\cdot y+y\cdot x+y\cdot y = x+x\cdot y+y\cdot x+y,$
odkud $x \cdot y = -y \cdot x = y \cdot x$, což jsme měli dokázat.

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

<u>Věta 9.2.</u> Nechť $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra.*

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra. Definujme na množině* G *operace* $+$ *a* $\cdot$ *takto: pro libovolné* $x, y \in G$ *klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

<u>*Věta 9.2.*</u> *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra. Definujme na množině* G *operace* $+$ *a* $\cdot$ *takto: pro libovolné* $x, y \in G$ *klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ *je Booleův okruh.*

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

<u>Věta 9.2.</u> Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je Booleova algebra. Definujme na množině G operace $+$ a $\cdot$ takto: pro libovolné $x, y \in G$ klademe

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ je Booleův okruh.

<u>Důkaz.</u> Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní.

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra. Definujme na množině* G *operace* $+$ *a* $\cdot$ *takto: pro libovolné* $x, y \in G$ *klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ *je Booleův okruh.*

Důkaz. Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní. Pro každé $x \in G$ platí $x + 0 = x$, $x + x = 0$, $x \cdot 1 = x$.

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra. Definujme na množině* G *operace* $+$ *a* $\cdot$ *takto: pro libovolné* $x, y \in G$ *klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ *je Booleův okruh.*

Důkaz. Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní. Pro každé $x \in G$ platí $x + 0 = x$, $x + x = 0$, $x \cdot 1 = x$. Je tedy $(G, \cdot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem 1.

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je Booleova algebra. Definujme na množině G operace $+$ a $\cdot$ takto: pro libovolné $x, y \in G$ klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ je Booleův okruh.

Důkaz. Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní. Pro každé $x \in G$ platí $x + 0 = x$, $x + x = 0$, $x \cdot 1 = x$. Je tedy $(G, \cdot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem 1. Dokažme distributivní zákon, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné.

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť* $(G, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra. Definujme na množině* G *operace* $+$ *a* $\cdot$ *takto: pro libovolné* $x, y \in G$ *klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ *je Booleův okruh.*

Důkaz. Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní. Pro každé $x \in G$ platí $x + 0 = x$, $x + x = 0$, $x \cdot 1 = x$. Je tedy $(G, \cdot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem 1. Dokažme distributivní zákon, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Z definic a De Morganových zákonů plyne

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z &= \big((x \wedge y) \wedge (x \wedge z)'\big) \vee \big((x \wedge y)' \wedge (x \wedge z)\big) = \\ &= \big(x \wedge y \wedge (x' \vee z')\big) \vee \big((x' \vee y') \wedge x \wedge z\big) = \\ &= (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge x \wedge z) \vee (y' \wedge x \wedge z) = \\ &= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) = \\ &= x \wedge \big((y \wedge z') \vee (y' \wedge z)\big) = x \cdot (y + z), \end{aligned}$$

Booleův okruh vzniká z Booleovy algebry

Věta 9.2. *Nechť $(G, \vee, \wedge)$ je Booleova algebra. Definujme na množině G operace $+$ a $\cdot$ takto: pro libovolné $x, y \in G$ klademe*

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \qquad x \cdot y = x \wedge y.$$

Pak $(G, +, \cdot)$ je Booleův okruh.

Důkaz. Obě operace jsou komutativní, násobení je i asociativní a idempotentní. Pro každé $x \in G$ platí $x + 0 = x$, $x + x = 0$, $x \cdot 1 = x$. Je tedy $(G, \cdot)$ je pologrupa s neutrálním prvkem 1. Dokažme distributivní zákon, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Z definic a De Morganových zákonů plyne

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z &= \big((x \wedge y) \wedge (x \wedge z)'\big) \vee \big((x \wedge y)' \wedge (x \wedge z)\big) = \\ &= \big(x \wedge y \wedge (x' \vee z')\big) \vee \big((x' \vee y') \wedge x \wedge z\big) = \\ &= (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge x \wedge z) \vee (y' \wedge x \wedge z) = \\ &= (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z) = \\ &= x \wedge \big((y \wedge z') \vee (y' \wedge z)\big) = x \cdot (y + z), \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Zbývá ověřit asociativitu sčítání, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné.

Zbývá ověřit asociativitu sčítání, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Z definice a De Morganových zákonů plyne

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y))' \wedge z\big) = \\
&= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big((x' \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge z\big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \\
&\qquad \vee \Big(((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y') \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge y')) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \Big(((x' \wedge y') \vee (y \wedge x)) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).
\end{aligned}
$$

Zbývá ověřit asociativitu sčítání, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné.
Z definice a De Morganových zákonů plyne

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y))' \wedge z\big) = \\
&= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big((x' \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge z\big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \\
&\qquad \vee \Big(((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y') \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge y')) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \Big(((x' \wedge y') \vee (y \wedge x)) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).
\end{aligned}$$

Poslední výraz se nezmění, provedeme-li s x, y, z jakoukoli permutaci.

Zbývá ověřit asociativitu sčítání, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Z definice a De Morganových zákonů plyne

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y))' \wedge z\big) = \\
&= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big((x' \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge z\big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \\
&\qquad \vee \Big(((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y') \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge y')) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \Big(((x' \wedge y') \vee (y \wedge x)) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).
\end{aligned}$$

Poslední výraz se nezmění, provedeme-li s x, y, z jakoukoli permutaci. Proto

$$(x+y)+z = (y+z)+x = x+(y+z),$$

a tedy sčítání je asociativní, tudíž $(G, +)$ je komutativní grupa.

Zbývá ověřit asociativitu sčítání, nechť $x, y, z \in G$ jsou libovolné. Z definice a De Morganových zákonů plyne

$$\begin{aligned}
(x+y)+z &= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y))' \wedge z\big) = \\
&= \big(((x \wedge y') \vee (x' \wedge y)) \wedge z'\big) \vee \big((x' \vee y) \wedge (x \vee y') \wedge z\big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \\
&\qquad \vee \Big(((x' \wedge x) \vee (x' \wedge y') \vee (y \wedge x) \vee (y \wedge y')) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee \Big(((x' \wedge y') \vee (y \wedge x)) \wedge z\Big) = \\
&= (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z).
\end{aligned}$$

Poslední výraz se nezmění, provedeme-li s x, y, z jakoukoli permutaci. Proto

$$(x+y)+z = (y+z)+x = x+(y+z),$$

a tedy sčítání je asociativní, tudíž $(G, +)$ je komutativní grupa. Ukázali jsme, že $(G, +, \cdot)$ je Booleův okruh.

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

Věta 9.3. *Nechť* $(R, +, \cdot)$ *je Booleův okruh.*

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

<u>*Věta 9.3.*</u> *Nechť* $(R, +, \cdot)$ *je Booleův okruh. Definujme na množině* R *operace* $\vee$ *a* $\wedge$ *takto: pro libovolné* $x, y \in R$ *klademe*

$$x \vee y = x \cdot y + x + y, \qquad x \wedge y = x \cdot y.$$

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

<u>Věta 9.3.</u> Nechť $(R, +, \cdot)$ *je Booleův okruh. Definujme na množině* R *operace* $\vee$ *a* $\wedge$ *takto: pro libovolné* $x, y \in R$ *klademe*

$$x \vee y = x \cdot y + x + y, \qquad x \wedge y = x \cdot y.$$

Pak $(R, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra, kde pro každé* $x \in R$ *platí* $x' = x + 1$.

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

Věta 9.3. *Nechť* $(R, +, \cdot)$ *je Booleův okruh. Definujme na množině* R *operace* $\vee$ *a* $\wedge$ *takto: pro libovolné* $x, y \in R$ *klademe*

$$x \vee y = x \cdot y + x + y, \qquad x \wedge y = x \cdot y.$$

Pak $(R, \vee, \wedge)$ *je Booleova algebra, kde pro každé* $x \in R$ *platí* $x' = x + 1$.

Důkaz. Operace $\wedge$ je komutativní, asociativní a idempotentní a operace $\vee$ komutativní a idempotentní.

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

Věta 9.3. *Nechť $(R, +, \cdot)$ je Booleův okruh. Definujme na množině R operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro libovolné $x, y \in R$ klademe*

$$x \vee y = x \cdot y + x + y, \qquad x \wedge y = x \cdot y.$$

Pak $(R, \vee, \wedge)$ je Booleova algebra, kde pro každé $x \in R$ platí $x' = x + 1$.

Důkaz. Operace $\wedge$ je komutativní, asociativní a idempotentní a operace $\vee$ komutativní a idempotentní. Pro libovolné $x, y, z \in R$ platí

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= (x \cdot y + x + y) \cdot z + (x \cdot y + x + y) + z = \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y + x + y + z = \\ &= x \cdot (y \cdot z + y + z) + x + y \cdot z + y + z = \\ &= x \vee (y \vee z),\end{aligned}$$

Booleova algebra vzniká z Booleova okruhu

Věta 9.3. *Nechť $(R, +, \cdot)$ je Booleův okruh. Definujme na množině R operace $\vee$ a $\wedge$ takto: pro libovolné $x, y \in R$ klademe*

$$x \vee y = x \cdot y + x + y, \qquad x \wedge y = x \cdot y.$$

Pak $(R, \vee, \wedge)$ je Booleova algebra, kde pro každé $x \in R$ platí $x' = x + 1$.

Důkaz. Operace $\wedge$ je komutativní, asociativní a idempotentní a operace $\vee$ komutativní a idempotentní. Pro libovolné $x, y, z \in R$ platí

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= (x \cdot y + x + y) \cdot z + (x \cdot y + x + y) + z = \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y + x + y + z = \\ &= x \cdot (y \cdot z + y + z) + x + y \cdot z + y + z = \\ &= x \vee (y \vee z),\end{aligned}$$

a tedy je $\vee$ asociativní operace.

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz.

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$.

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$. Proto je 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.

Protože

$$(x\vee y)\wedge x = (x\cdot y+x+y)\cdot x = x\cdot y\cdot x+x\cdot x+y\cdot x = x\cdot y+x\cdot y+x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$. Proto je 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.
Ověřme, že skutečně je $x + 1$ komplementem prvku x:

$$\begin{aligned} x \wedge (x+1) &= x \cdot (x+1) = x \cdot x + x = x + x = 0, \\ x \vee (x+1) &= x \cdot (x+1) + x + (x+1) = 0 + x + x + 1 = 1. \end{aligned}$$

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$. Proto je 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.
Ověřme, že skutečně je $x + 1$ komplementem prvku x:

$$\begin{aligned} x \wedge (x+1) &= x \cdot (x+1) = x \cdot x + x = x + x = 0, \\ x \vee (x+1) &= x \cdot (x+1) + x + (x+1) = 0 + x + x + 1 = 1. \end{aligned}$$

Je tedy $(R, \vee, \wedge)$ komplementární svaz, zbývá ukázat, že je to též svaz distributivní.

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$. Proto je 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.

Ověřme, že skutečně je $x + 1$ komplementem prvku x:

$$\begin{aligned} x \wedge (x+1) &= x \cdot (x+1) = x \cdot x + x = x + x = 0, \\ x \vee (x+1) &= x \cdot (x+1) + x + (x+1) = 0 + x + x + 1 = 1. \end{aligned}$$

Je tedy $(R, \vee, \wedge)$ komplementární svaz, zbývá ukázat, že je to též svaz distributivní. Platí

$$\begin{aligned} (x \wedge z) \vee (y \wedge z) &= (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) + (x \cdot z) + (y \cdot z) = \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z = (x \cdot y + x + y) \cdot z = \\ &= (x \vee y) \wedge z. \end{aligned}$$

Protože

$$(x \vee y) \wedge x = (x \cdot y + x + y) \cdot x = x \cdot y \cdot x + x \cdot x + y \cdot x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

a také

$$(x \wedge y) \vee x = (x \cdot y) \cdot x + (x \cdot y) + x = x \cdot y + x \cdot y + x = x,$$

je $(R, \vee, \wedge)$ svaz. Protože pro každé $x \in R$ je $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, platí $0 \leq x$, podobně $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, a tedy $x \leq 1$. Proto je 0 nejmenší a 1 největší prvek tohoto svazu.
Ověřme, že skutečně je $x + 1$ komplementem prvku x:

$$\begin{aligned} x \wedge (x+1) &= x \cdot (x+1) = x \cdot x + x = x + x = 0, \\ x \vee (x+1) &= x \cdot (x+1) + x + (x+1) = 0 + x + x + 1 = 1. \end{aligned}$$

Je tedy $(R, \vee, \wedge)$ komplementární svaz, zbývá ukázat, že je to též svaz distributivní. Platí

$$\begin{aligned} (x \wedge z) \vee (y \wedge z) &= (x \cdot z) \cdot (y \cdot z) + (x \cdot z) + (y \cdot z) = \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z + y \cdot z = (x \cdot y + x + y) \cdot z = \\ &= (x \vee y) \wedge z. \end{aligned}$$

Věta je dokázána.

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

Věta 9.4. Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

Věta 9.4. *Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.*

Důkaz. Ukážeme, že v předchozí konstrukci si Booleovy okruhy a Booleovy algebry navzájem odpovídají.

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

<u>*Věta 9.4.*</u> *Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.*

<u>*Důkaz.*</u> Ukážeme, že v předchozí konstrukci si Booleovy okruhy a Booleovy algebry navzájem odpovídají. Součiny a infima na sebe přecházely.

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

Věta 9.4. *Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.*

Důkaz. Ukážeme, že v předchozí konstrukci si Booleovy okruhy a Booleovy algebry navzájem odpovídají. Součiny a infima na sebe přecházely. Vyjděme z Booleova okruhu:

B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, \oplus, \cdot)$.

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

Věta 9.4. *Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.*

Důkaz. Ukážeme, že v předchozí konstrukci si Booleovy okruhy a Booleovy algebry navzájem odpovídají. Součiny a infima na sebe přecházely. Vyjděme z Booleova okruhu:

B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, \oplus, \cdot)$.

Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = \\ &= (x \cdot y') \cdot (x' \cdot y) + (x \cdot y') + (x' \cdot y) = \\ &= x \cdot (x+1) \cdot y \cdot (y+1) + x \cdot (y+1) + (x+1) \cdot y = \\ &= 0 + x \cdot y + x + x \cdot y + y = x + y. \end{aligned}$$

Korespondence Booleových algeber a Booleových okruhů

Věta 9.4. *Předchozí dvě věty nám dávají jednoznačnou korespondenci mezi Booleovými okruhy a Booleovými algebrami.*

Důkaz. Ukážeme, že v předchozí konstrukci si Booleovy okruhy a Booleovy algebry navzájem odpovídají. Součiny a infima na sebe přecházely. Vyjděme z Booleova okruhu:

B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, \oplus, \cdot)$.

Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = \\ &= (x \cdot y') \cdot (x' \cdot y) + (x \cdot y') + (x' \cdot y) = \\ &= x \cdot (x+1) \cdot y \cdot (y+1) + x \cdot (y+1) + (x+1) \cdot y = \\ &= 0 + x \cdot y + x + x \cdot y + y = x + y. \end{aligned}$$

Nyní vyjděme z Booleovy algebry:

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.

Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$
\begin{aligned}
x \sqcup y &= x \cdot y + x + y = x + y + (x \wedge y) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x \wedge y)'\big) \vee \big(y' \wedge (x \wedge y)\big) \Big) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x' \vee y')\big) \vee 0 \Big) = \\
&= x + \big((y \wedge x') \vee (y \wedge y')\big) = x + \big((y \wedge x') \vee 0\big) = \\
&= x + (y \wedge x') = \big(x \wedge (y \wedge x')'\big) \vee \big(x' \wedge (y \wedge x')\big) = \\
&= \big(x \wedge (y' \vee x)\big) \vee (x' \wedge y) = \\
&= x \vee (x' \wedge y) = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y,
\end{aligned}
$$

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.
Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$
\begin{aligned}
x \sqcup y = x \cdot y + x + y = x + y + (x \wedge y) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x \wedge y)'\big) \vee \big(y' \wedge (x \wedge y)\big) \Big) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x' \vee y')\big) \vee 0 \Big) = \\
&= x + \big((y \wedge x') \vee (y \wedge y')\big) = x + \big((y \wedge x') \vee 0\big) = \\
&= x + (y \wedge x') = \big(x \wedge (y \wedge x')'\big) \vee \big(x' \wedge (y \wedge x')\big) = \\
&= \big(x \wedge (y' \vee x)\big) \vee (x' \wedge y) = \\
&= x \vee (x' \wedge y) = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y,
\end{aligned}
$$

což bylo třeba ověřit.

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.
Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$\begin{aligned}
x \sqcup y &= x \cdot y + x + y = x + y + (x \wedge y) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x \wedge y)'\big) \vee \big(y' \wedge (x \wedge y)\big)\Big) = \\
&= x + \Big(\big(y \wedge (x' \vee y')\big) \vee 0\Big) = \\
&= x + \big((y \wedge x') \vee (y \wedge y')\big) = x + \big((y \wedge x') \vee 0\big) = \\
&= x + (y \wedge x') = \big(x \wedge (y \wedge x')'\big) \vee \big(x' \wedge (y \wedge x')\big) = \\
&= \big(x \wedge (y' \vee x)\big) \vee (x' \wedge y) = \\
&= x \vee (x' \wedge y) = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y,
\end{aligned}$$

což bylo třeba ověřit.

Poznámka. Podobné dvojí pohledy na jeden objekt bývají v matematice velmi cenné, neboť mnohdy ukáží nečekané souvislosti.

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.
Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$\begin{aligned}
x \sqcup y = x \cdot y + x + y = x + y + (x \wedge y) = \\
&= x + \Big((y \wedge (x \wedge y)') \vee (y' \wedge (x \wedge y)) \Big) = \\
&= x + \Big((y \wedge (x' \vee y')) \vee 0 \Big) = \\
&= x + ((y \wedge x') \vee (y \wedge y')) = x + ((y \wedge x') \vee 0) = \\
&= x + (y \wedge x') = (x \wedge (y \wedge x')') \vee (x' \wedge (y \wedge x')) = \\
&= (x \wedge (y' \vee x)) \vee (x' \wedge y) = \\
&= x \vee (x' \wedge y) = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y,
\end{aligned}$$

což bylo třeba ověřit.

Poznámka. Podobné dvojí pohledy na jeden objekt bývají v matematice velmi cenné, neboť mnohdy ukáží nečekané souvislosti. Příkladem může být dualita, která je pro Booleovy algebry naprosto zřejmá.

B. algebra $(R, \vee, \wedge) \mapsto$ B. okruh $(R, +, \cdot) \mapsto$ B. algebra $(R, \sqcup, \wedge)$.

Pro libovolné $x, y \in R$ tedy platí

$$\begin{aligned} x \sqcup y &= x \cdot y + x + y = x + y + (x \wedge y) = \\ &= x + \Big((y \wedge (x \wedge y)') \vee (y' \wedge (x \wedge y)) \Big) = \\ &= x + \Big((y \wedge (x' \vee y')) \vee 0 \Big) = \\ &= x + ((y \wedge x') \vee (y \wedge y')) = x + ((y \wedge x') \vee 0) = \\ &= x + (y \wedge x') = (x \wedge (y \wedge x')') \vee (x' \wedge (y \wedge x')) = \\ &= (x \wedge (y' \vee x)) \vee (x' \wedge y) = \\ &= x \vee (x' \wedge y) = (x \vee x') \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = x \vee y, \end{aligned}$$

což bylo třeba ověřit.

Poznámka. Podobné dvojí pohledy na jeden objekt bývají v matematice velmi cenné, neboť mnohdy ukáží nečekané souvislosti. Příkladem může být dualita, která je pro Booleovy algebry naprosto zřejmá. Výše uvedenou korespondencí se převádí též na Booleovy okruhy, kde už však není tak snadné si jí všimnout.