Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.

II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n + 1$.

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.
II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n+1$. Víme tedy
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n.$

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.
II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n + 1$. Víme tedy
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n.$
Vynásobením (užíváme komutativitu okruhu)
$(a+b)^n \cdot a = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a \cdot b^n,$

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.
II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n + 1$. Víme tedy

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n.$

Vynásobením (užíváme komutativitu okruhu)

$$\begin{aligned}
(a+b)^n \cdot a &= a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a \cdot b^n,\\
(a+b)^n \cdot b &= \phantom{a^{n+1} + {}} \binom{n}{0} a^n \cdot b + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^n + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.
II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n+1$. Víme tedy
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n.$
Vynásobením (užíváme komutativitu okruhu)
$(a+b)^n \cdot a = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a \cdot b^n,$
$(a+b)^n \cdot b = \binom{n}{0} a^n \cdot b + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^n + b^{n+1}.$
Sečtením a užitím $\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ dostaneme
$(a+b)^{n+1} =$
$a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n \cdot b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n} a \cdot b^n + b^{n+1},$

Binomická věta v komutativním okruhu

Věta (binomická). *Nechť R je komutativní okruh, pak pro každé $a, b \in R$ a každé $n \in \mathbb{N}$*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i,$$

kde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ značí obvyklý binomický koeficient.

Důkaz. indukcí vůči n: I. krok: případ $n = 1$ je zřejmý.
II. krok: předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ už bylo dokázáno, dokážeme tvrzení pro $n+1$. Víme tedy
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$.
Vynásobením (užíváme komutativitu okruhu)
$(a+b)^n \cdot a = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a \cdot b^n$,
$(a+b)^n \cdot b = \binom{n}{0} a^n \cdot b + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^n + b^{n+1}$.
Sečtením a užitím $\binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}$ dostaneme
$(a+b)^{n+1} =$
$a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n \cdot b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n} a \cdot b^n + b^{n+1}$,
což se mělo dokázat.

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Věta. *Pro libovolné prvočíslo p a libovolné* $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ *platí* $p \mid \binom{p}{i}$.

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Věta. *Pro libovolné prvočíslo* p *a libovolné* $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ *platí* $p \mid \binom{p}{i}$.

Důkaz. Platí $p \mid p! = \binom{p}{i} \cdot i! \cdot (p-i)!$.

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Věta. *Pro libovolné prvočíslo* p *a libovolné* $i \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ *platí* $p \mid \binom{p}{i}$.

Důkaz. Platí $p \mid p! = \binom{p}{i} \cdot i! \cdot (p-i)!$. Současně $p \nmid i! \cdot (p-i)!$.

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Věta. *Pro libovolné prvočíslo p a libovolné $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ platí $p \mid \binom{p}{i}$.*

Důkaz. Platí $p \mid p! = \binom{p}{i} \cdot i! \cdot (p-i)!$. Současně $p \nmid i! \cdot (p-i)!$.

Věta. *Nechť R je komutativní okruh prvočíselné charakteristiky* char $R = p$. *Pak pro každé $a, b \in R$ platí*

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

Umocnění na prvočíselnou charakteristiku komutativního okruhu

Poznámka. Každý okruh, ve kterém platí binomická věta pro $n = 2$, je komutativní.

Věta. *Pro libovolné prvočíslo p a libovolné $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ platí $p \mid \binom{p}{i}$.*

Důkaz. Platí $p \mid p! = \binom{p}{i} \cdot i! \cdot (p-i)!$. Současně $p \nmid i! \cdot (p-i)!$.

Věta. *Nechť R je komutativní okruh prvočíselné charakteristiky* char $R = p$. *Pak pro každé $a, b \in R$ platí*

$$(a+b)^p = a^p + b^p.$$

[Věta 2.9, str. 62]

Důsledek. *Nechť R je obor integrity charakteristiky* char $R = p > 0$. *Pak zobrazení $f : R \to R$, kde $f(r) = r^p$, je injektivní homomorfismus okruhů.*