Příklady využití teorie symetrických polynomů

Poznámka. Porovnáním Viétových vztahů s definicí elementárních symetrických polynomů vidíme, že koeficienty normovaného polynomu f stupně n jsou (až na střídající se znaménka) hodnoty elementárních symetrických polynomů v kořenech polynomu f.

Příklady využití teorie symetrických polynomů

<u>Poznámka.</u> Porovnáním Viétových vztahů s definicí elementárních symetrických polynomů vidíme, že koeficienty normovaného polynomu f stupně n jsou (až na střídající se znaménka) hodnoty elementárních symetrických polynomů v kořenech polynomu f. Proto hodnotu libovolného symetrického polynomu v kořenech polynomu f je možné určit pomocí koeficientů polynomu f, aniž by bylo nutné kořeny polynomu f spočítat.

Příklady využití teorie symetrických polynomů

Poznámka. Porovnáním Viétových vztahů s definicí elementárních symetrických polynomů vidíme, že koeficienty normovaného polynomu f stupně n jsou (až na střídající se znaménka) hodnoty elementárních symetrických polynomů v kořenech polynomu f. Proto hodnotu libovolného symetrického polynomu v kořenech polynomu f je možné určit pomocí koeficientů polynomu f, aniž by bylo nutné kořeny polynomu f spočítat. Ukážeme si to postupně na třech příkladech.

Příklady využití teorie symetrických polynomů

Poznámka. Porovnáním Viétových vztahů s definicí elementárních symetrických polynomů vidíme, že koeficienty normovaného polynomu f stupně n jsou (až na střídající se znaménka) hodnoty elementárních symetrických polynomů v kořenech polynomu f. Proto hodnotu libovolného symetrického polynomu v kořenech polynomu f je možné určit pomocí koeficientů polynomu f, aniž by bylo nutné kořeny polynomu f spočítat. Ukážeme si to postupně na třech příkladech.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Příklady využití teorie symetrických polynomů

Poznámka. Porovnáním Viétových vztahů s definicí elementárních symetrických polynomů vidíme, že koeficienty normovaného polynomu f stupně n jsou (až na střídající se znaménka) hodnoty elementárních symetrických polynomů v kořenech polynomu f. Proto hodnotu libovolného symetrického polynomu v kořenech polynomu f je možné určit pomocí koeficientů polynomu f, aniž by bylo nutné kořeny polynomu f spočítat. Ukážeme si to postupně na třech příkladech.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost).

<u>Příklad 2.</u> Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost).

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$ mající kořeny

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),\\
\beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),\\
\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),
\end{aligned}$$

a vyjádřete jeho koeficienty u, v, w pomocí koeficientů a, b, c, d.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$.
Polynom h je homogenní.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$.
Polynom h je homogenní. Vyjádříme jej pomocí elementárních symetrických polynomů; podle algoritmu z přednášky víme, že z toho, že polynom h má vedoucí člen $x_1^2x_2$ a vedoucí koeficient 1 plyne, že $h = s_1s_2 + As_3$ pro zatím neznámý koeficient $A \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[2, 1, 0]$ a $[1, 1, 1]$).

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$. Polynom h je homogenní. Vyjádříme jej pomocí elementárních symetrických polynomů; podle algoritmu z přednášky víme, že z toho, že polynom h má vedoucí člen $x_1^2x_2$ a vedoucí koeficient 1 plyne, že $h = s_1s_2 + As_3$ pro zatím neznámý koeficient $A \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[2, 1, 0]$ a $[1, 1, 1]$). Volbou $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme

$$h(1,1,1) = s_1(1,1,1) \cdot s_2(1,1,1) + As_3(1,1,1) = 3 \cdot 3 + A \cdot 1 = A + 9,$$

a z $h(1, 1, 1) = 6$ plyne $A = -3$.

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$.
Polynom h je homogenní. Vyjádříme jej pomocí elementárních symetrických polynomů; podle algoritmu z přednášky víme, že z toho, že polynom h má vedoucí člen $x_1^2x_2$ a vedoucí koeficient 1 plyne, že $h = s_1s_2 + As_3$ pro zatím neznámý koeficient $A \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[2, 1, 0]$ a $[1, 1, 1]$). Volbou $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme

$$h(1, 1, 1) = s_1(1, 1, 1)\cdot s_2(1, 1, 1) + As_3(1, 1, 1) = 3\cdot 3 + A\cdot 1 = A + 9,$$

a z $h(1, 1, 1) = 6$ plyne $A = -3$. Platí proto $h = s_1s_2 - 3s_3$,

Příklad 1. Polynom $f = x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ má v $\mathbb{C}$ tři jednoduché kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Spočítejte hodnotu výrazu $\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3^2$.

Řešení. Máme určit hodnotu $h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ symetrického polynomu $h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z Viétových vztahů známe hodnoty elementárních symetrických polynomů, až na střídající se znaménka jde o koeficienty polynomu f, tedy $s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$, $s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1$.
Polynom h je homogenní. Vyjádříme jej pomocí elementárních symetrických polynomů; podle algoritmu z přednášky víme, že z toho, že polynom h má vedoucí člen $x_1^2x_2$ a vedoucí koeficient 1 plyne, že $h = s_1s_2 + As_3$ pro zatím neznámý koeficient $A \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[2, 1, 0]$ a $[1, 1, 1]$). Volbou $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme

$$h(1, 1, 1) = s_1(1, 1, 1) \cdot s_2(1, 1, 1) + As_3(1, 1, 1) = 3 \cdot 3 + A \cdot 1 = A + 9,$$

a z $h(1, 1, 1) = 6$ plyne $A = -3$. Platí proto $h = s_1s_2 - 3s_3$, odkud

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - 3s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 4.$$

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Řešení. Je tedy $g = (x - \beta_1)(x - \beta_2) = x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2$.

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Řešení. Je tedy $g = (x - \beta_1)(x - \beta_2) = x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2$.
Platí $\beta_1 + \beta_2 = h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro polynom
$h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Řešení. Je tedy $g = (x - \beta_1)(x - \beta_2) = x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2$.
Platí $\beta_1 + \beta_2 = h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro polynom
$h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z řešení příkladu 1 víme, že $h = s_1s_2 - 3s_3$, odkud

$$h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - 3s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = (-a) \cdot b - 3 \cdot (-c) = 3c - ab.$$

Příklad 2. Polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kvadratický polynom $g \in \mathbb{C}[x]$, jehož kořeny jsou

$$\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3, \qquad \beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2,$$

a vyjádřete koeficienty polynomu g pomocí koeficientů polynomu f.

Řešení. Je tedy $g = (x - \beta_1)(x - \beta_2) = x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \beta_1\beta_2$.
Platí $\beta_1 + \beta_2 = h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro polynom
$h = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
Z řešení příkladu 1 víme, že $h = s_1s_2 - 3s_3$, odkud

$$\begin{aligned} h(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= s_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - 3s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ &= (-a) \cdot b - 3 \cdot (-c) = 3c - ab. \end{aligned}$$

Dostali jsme $\beta_1 + \beta_2 = 3c - ab$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$).

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$. Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$ dostaneme $9 = -27B + 4D$, odkud $D = 9$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$. Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$ dostaneme $9 = -27B + 4D$, odkud $D = 9$. Dosazením $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme $9 = 27 + 27B + 9C + D$, odkud $C = -6$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$. Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$ dostaneme $9 = -27B + 4D$, odkud $D = 9$. Dosazením $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme $9 = 27 + 27B + 9C + D$, odkud $C = -6$. Proto $k = s_1^3s_3 + s_2^3 - 6s_1s_2s_3 + 9s_3^2$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$. Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$ dostaneme $9 = -27B + 4D$, odkud $D = 9$. Dosazením $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme $9 = 27 + 27B + 9C + D$, odkud $C = -6$. Proto $k = s_1^3s_3 + s_2^3 - 6s_1s_2s_3 + 9s_3^2$. Dostali jsme

$$\begin{aligned} k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (-a)^3 \cdot (-c) + b^3 - 6(-a) \cdot b \cdot (-c) + 9(-c)^2 = \\ &= a^3c + b^3 - 6abc + 9c^2, \end{aligned}$$

a tedy $\beta_1\beta_2 = a^3c + b^3 - 6abc + 9c^2$.

Podobně $\beta_1\beta_2 = k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pro homogenní symetrický polynom $k = (x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$. Vedoucí člen tohoto polynomu je $x_1^2x_2 \cdot x_1^2x_3 = x_1^4x_2x_3$, jeho vedoucí koeficient je 1. Podle algoritmu z přednášky je $k = s_1^3s_3 + Bs_2^3 + Cs_1s_2s_3 + Ds_3^2$ pro zatím neznámé $B, C, D \in \mathbb{Z}$ (jde o trojice exponentů $[4, 1, 1]$, $[3, 3, 0]$, $[3, 2, 1]$ a $[2, 2, 2]$). Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $1 = B$. Dosazením $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$ dostaneme $9 = -27B + 4D$, odkud $D = 9$. Dosazením $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ dostaneme $9 = 27 + 27B + 9C + D$, odkud $C = -6$. Proto $k = s_1^3s_3 + s_2^3 - 6s_1s_2s_3 + 9s_3^2$. Dostali jsme

$$\begin{aligned} k(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (-a)^3 \cdot (-c) + b^3 - 6(-a) \cdot b \cdot (-c) + 9(-c)^2 = \\ &= a^3c + b^3 - 6abc + 9c^2, \end{aligned}$$

a tedy $\beta_1\beta_2 = a^3c + b^3 - 6abc + 9c^2$. Hledaný polynom g je proto

$$g = x^2 + (ab - 3c)x + (a^3c + b^3 - 6abc + 9c^2).$$

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$ mající kořeny

$$\beta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),$$
$$\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),$$
$$\beta_3 = (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),$$

a vyjádřete jeho koeficienty u, v, w pomocí koeficientů a, b, c, d.

Řešení. Protože $u = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, vyjádříme symetrický polynom

$$h = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů.

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$ mající kořeny

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),\\ \beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),\\ \beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}$$

a vyjádřete jeho koeficienty u, v, w pomocí koeficientů a, b, c, d.

Řešení. Protože $u = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, vyjádříme symetrický polynom

$$h = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu h spočítáme určením vedoucích členů a koeficientů tří sčítanců, jejich vedoucí členy jsou po řadě x_1x_3, x_1x_2, x_1x_2, všechny mají vedoucí koeficienty 1.

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$ mající kořeny

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),\\ \beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),\\ \beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}$$

a vyjádřete jeho koeficienty u, v, w pomocí koeficientů a, b, c, d.

Řešení. Protože $u = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, vyjádříme symetrický polynom

$$h = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu h spočítáme určením vedoucích členů a koeficientů tří sčítanců, jejich vedoucí členy jsou po řadě x_1x_3, x_1x_2, x_1x_2, všechny mají vedoucí koeficienty 1. Vedoucí člen polynomu h je tedy x_1x_2, vedoucí koeficient je 2, polynom h je homogenní.

Příklad 3. Polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ má kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost). Nalezněte normovaný kubický polynom $g(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$ mající kořeny

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4),\\ \beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4),\\ \beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3),\end{aligned}$$

a vyjádřete jeho koeficienty u, v, w pomocí koeficientů a, b, c, d.

Řešení. Protože $u = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3$, vyjádříme symetrický polynom

$$h = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu h spočítáme určením vedoucích členů a koeficientů tří sčítanců, jejich vedoucí členy jsou po řadě x_1x_3, x_1x_2, x_1x_2, všechny mají vedoucí koeficienty 1. Vedoucí člen polynomu h je tedy x_1x_2, vedoucí koeficient je 2, polynom h je homogenní. Jedinou uvažovanou čtveřicí koeficientů je $[1, 1, 0, 0]$, proto $h = 2s_2$, odkud plyne $u = -2b$.

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$\begin{aligned} k = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\ + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\ + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

pomocí elementárních symetrických polynomů.

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$
\begin{aligned}
k = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\
+ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\
+ (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)
\end{aligned}
$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu k je $x_1^2 x_2^2$, vedoucí koeficient je 1.

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$\begin{aligned} k = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\ + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\ + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu k je $x_1^2 x_2^2$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$k = s_2^2 + A s_1 s_3 + B s_4$$

pro zatím neznámé $A, B \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[2, 2, 0, 0]$, $[2, 1, 1, 0]$ a $[1, 1, 1, 1]$).

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$\begin{aligned} k = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\ + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\ + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu k je $x_1^2 x_2^2$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$k = s_2^2 + As_1s_3 + Bs_4$$

pro zatím neznámé $A, B \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[2, 2, 0, 0]$, $[2, 1, 1, 0]$ a $[1, 1, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $12 = 9 + 3A$, odkud $A = 1$.

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$\begin{aligned} k = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\ + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\ + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu k je $x_1^2x_2^2$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$k = s_2^2 + As_1s_3 + Bs_4$$

pro zatím neznámé $A, B \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[2,2,0,0]$, $[2,1,1,0]$ a $[1,1,1,1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $12 = 9 + 3A$, odkud $A = 1$. Volbou $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dostaneme $48 = 36 + 16A + B$, odkud $B = -4$.

Podobně $v = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$\begin{aligned} k = &(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) + \\ &+ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + \\ &+ (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \end{aligned}$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu k je $x_1^2 x_2^2$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$k = s_2^2 + As_1s_3 + Bs_4$$

pro zatím neznámé $A, B \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[2, 2, 0, 0]$, $[2, 1, 1, 0]$ a $[1, 1, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $12 = 9 + 3A$, odkud $A = 1$. Volbou $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dostaneme $48 = 36 + 16A + B$, odkud $B = -4$. Proto

$$k = s_2^2 + s_1s_3 - 4s_4,$$

odkud plyne $v = b^2 + ac - 4d$.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3 x_2^2 x_3$, vedoucí koeficient je 1.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3x_2^2x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1s_2s_3 + Cs_1^2s_4 + Ds_3^2 + Es_2s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$).

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3 x_2^2 x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1 s_2 s_3 + C s_1^2 s_4 + D s_3^2 + E s_2 s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $8 = 9 + D$, odkud $D = -1$.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3 x_2^2 x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1 s_2 s_3 + C s_1^2 s_4 + D s_3^2 + E s_2 s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $8 = 9 + D$, odkud $D = -1$. Volbou $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$ dostaneme $0 = -2E$, odkud $E = 0$.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3 x_2^2 x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1 s_2 s_3 + C s_1^2 s_4 + D s_3^2 + E s_2 s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $8 = 9 + D$, odkud $D = -1$. Volbou $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$ dostaneme $0 = -2E$, odkud $E = 0$. Konečně volbou $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dostaneme $64 = 96 + 16C + 16D + 6E$, a tedy $C = -1$.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3x_2^2x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1s_2s_3 + Cs_1^2s_4 + Ds_3^2 + Es_2s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $8 = 9 + D$, odkud $D = -1$. Volbou $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$ dostaneme $0 = -2E$, odkud $E = 0$. Konečně volbou $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dostaneme $64 = 96 + 16C + 16D + 6E$, a tedy $C = -1$. Proto

$$m = s_1s_2s_3 - s_1^2s_4 - s_3^2,$$

odkud plyne $w = -abc + a^2d + c^2$.

Konečně $w = -\beta_1\beta_2\beta_3$, vyjádříme proto homogenní symetrický polynom

$$m = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

pomocí elementárních symetrických polynomů. Vedoucí člen polynomu m je $x_1^3x_2^2x_3$, vedoucí koeficient je 1. Proto platí

$$m = s_1s_2s_3 + Cs_1^2s_4 + Ds_3^2 + Es_2s_4$$

pro zatím neznámé $C, D, E \in \mathbb{Z}$ (jde o čtveřice exponentů $[3, 2, 1, 0]$, $[3, 1, 1, 1]$, $[2, 2, 2, 0]$ a $[2, 2, 1, 1]$). Z dosazení $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ plyne $8 = 9 + D$, odkud $D = -1$. Volbou $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$ dostaneme $0 = -2E$, odkud $E = 0$. Konečně volbou $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ dostaneme $64 = 96 + 16C + 16D + 6E$, a tedy $C = -1$. Proto

$$m = s_1s_2s_3 - s_1^2s_4 - s_3^2,$$

odkud plyne $w = -abc + a^2d + c^2$.
Hledaný polynom g je proto

$$g = x^3 - 2bx^2 + (b^2 + ac - 4d)x + (-abc + a^2d + c^2).$$

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Niccolo Tartaglia (1500 – 1557) oznámil v roce 1530, že umí řešit kubické rovnice, ale svůj postup nezveřejnil.

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Niccolo Tartaglia (1500 – 1557) oznámil v roce 1530, že umí řešit kubické rovnice, ale svůj postup nezveřejnil.

Gerolamo Cardano (1501 – 1576) v roce 1539 přesvědčil Tartaglia, aby mu svůj postup prozradil, měl však zakázáno postup zveřejnit.

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Niccolo Tartaglia (1500 – 1557) oznámil v roce 1530, že umí řešit kubické rovnice, ale svůj postup nezveřejnil.

Gerolamo Cardano (1501 – 1576) v roce 1539 přesvědčil Tartaglia, aby mu svůj postup prozradil, měl však zakázáno postup zveřejnit. Avšak poté, co se mu dostal do rukou poznámkový blok del Ferro, publikoval toto řešení jako del Ferrovo roku 1545 v knize Ars Magna se zmínkou, že Tartagla našel nezávisle řešení (bylo to až 6 let poté, co mu je Tartaglia sdělil).

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Niccolo Tartaglia (1500 – 1557) oznámil v roce 1530, že umí řešit kubické rovnice, ale svůj postup nezveřejnil.

Gerolamo Cardano (1501 – 1576) v roce 1539 přesvědčil Tartaglia, aby mu svůj postup prozradil, měl však zakázáno postup zveřejnit. Avšak poté, co se mu dostal do rukou poznámkový blok del Ferro, publikoval toto řešení jako del Ferrovo roku 1545 v knize Ars Magna se zmínkou, že Tartagla našel nezávisle řešení (bylo to až 6 let poté, co mu je Tartaglia sdělil).

Cardanův žák **Lodovico Ferrari** v roce 1540 objevil, jak vyřešit rovnici čtvrtého stupně pomocí řešení jiné rovnice třetího stupně.

Trocha historie o řešení algebraických rovnic 3. a 4. stupně

Scipione del Ferro (1465 – 1526) našel metodu řešení jisté třídy kubických rovnic tvaru $x^3 + mx = n$, patrně koncem 15. století, ale svůj výsledek nezveřejňoval, byl prý objeven až posmrtně v jeho poznámkovém bloku.

Niccolo Tartaglia (1500 – 1557) oznámil v roce 1530, že umí řešit kubické rovnice, ale svůj postup nezveřejnil.

Gerolamo Cardano (1501 – 1576) v roce 1539 přesvědčil Tartaglia, aby mu svůj postup prozradil, měl však zakázáno postup zveřejnit. Avšak poté, co se mu dostal do rukou poznámkový blok del Ferro, publikoval toto řešení jako del Ferrovo roku 1545 v knize Ars Magna se zmínkou, že Tartagla našel nezávisle řešení (bylo to až 6 let poté, co mu je Tartaglia sdělil).

Cardanův žák **Lodovico Ferrari** v roce 1540 objevil, jak vyřešit rovnici čtvrtého stupně pomocí řešení jiné rovnice třetího stupně.

Protože jde o aplikaci symetrických polynomů, ukažme si více detailů.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y-\frac{a}{3})^3 + a(y-\frac{a}{3})^2 + b(y-\frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b-a^2}{3}y + \frac{2a^3-9ab+27c}{27}$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru

$$f = (y - \tfrac{a}{3})^3 + a(y - \tfrac{a}{3})^2 + b(y - \tfrac{a}{3}) + c = y^3 + \tfrac{3b-a^2}{3}y + \tfrac{2a^3-9ab+27c}{27}.$$

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y-\frac{a}{3})^3 + a(y-\frac{a}{3})^2 + b(y-\frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b-a^2}{3}y + \frac{2a^3-9ab+27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y-\frac{a}{3})^3 + a(y-\frac{a}{3})^2 + b(y-\frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b-a^2}{3}y + \frac{2a^3-9ab+27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Víme, že $\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2$ z příkladu 2 splňují $\beta_1 + \beta_2 = 3c$, $\beta_1\beta_2 = b^3 + 9c^2$ a
$(\beta_1-\beta_2)^2 = (\beta_1+\beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 9c^2 - 4(b^3+9c^2) = -4b^3 - 27c^2$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y-\frac{a}{3})^3 + a(y-\frac{a}{3})^2 + b(y-\frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b-a^2}{3}y + \frac{2a^3-9ab+27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.
Víme, že $\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2$ z příkladu 2 splňují $\beta_1 + \beta_2 = 3c$, $\beta_1\beta_2 = b^3 + 9c^2$ a
$(\beta_1-\beta_2)^2 = (\beta_1+\beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 9c^2 - 4(b^3+9c^2) = -4b^3 - 27c^2$.
Zvolme $d \in \mathbb{C}$, aby $d^2 = 4b^3 + 27c^2$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b - a^2}{3} y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Víme, že $\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2$
z příkladu 2 splňují $\beta_1 + \beta_2 = 3c$, $\beta_1\beta_2 = b^3 + 9c^2$ a
$(\beta_1 - \beta_2)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 9c^2 - 4(b^3 + 9c^2) = -4b^3 - 27c^2$.

Zvolme $d \in \mathbb{C}$, aby $d^2 = 4b^3 + 27c^2$. Pak $\beta_1 - \beta_2 = i \cdot d$ (po případné záměně $\alpha_2 \mapsto \alpha_3$, $\alpha_3 \mapsto \alpha_2$ změní $\beta_1 - \beta_2$ znaménko).

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b-a^2}{3}y + \frac{2a^3-9ab+27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Víme, že $\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2$ z příkladu 2 splňují $\beta_1 + \beta_2 = 3c$, $\beta_1\beta_2 = b^3 + 9c^2$ a
$(\beta_1 - \beta_2)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 9c^2 - 4(b^3 + 9c^2) = -4b^3 - 27c^2$.

Zvolme $d \in \mathbb{C}$, aby $d^2 = 4b^3 + 27c^2$. Pak $\beta_1 - \beta_2 = i \cdot d$ (po případné záměně $\alpha_2 \mapsto \alpha_3$, $\alpha_3 \mapsto \alpha_2$ změní $\beta_1 - \beta_2$ znaménko).

TRIK: Označme $\gamma_1 = \alpha_1 + \rho\alpha_2 + \rho^2\alpha_3$, $\gamma_2 = \alpha_1 + \rho^2\alpha_2 + \rho\alpha_3$, kde $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, a tedy $\rho^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a $\rho^3 = 1$.

Cardanovy vzorce pro kořeny kubického polynomu

Libovolný polynom $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{3}$ upravit do tvaru
$f = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = y^3 + \frac{3b - a^2}{3} y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$.
Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že platí $a = 0$.
Pak kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ polynomu f splňují $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

Víme, že $\beta_1 = \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2$ z příkladu 2 splňují $\beta_1 + \beta_2 = 3c$, $\beta_1\beta_2 = b^3 + 9c^2$ a
$(\beta_1 - \beta_2)^2 = (\beta_1 + \beta_2)^2 - 4\beta_1\beta_2 = 9c^2 - 4(b^3 + 9c^2) = -4b^3 - 27c^2$.

Zvolme $d \in \mathbb{C}$, aby $d^2 = 4b^3 + 27c^2$. Pak $\beta_1 - \beta_2 = i \cdot d$ (po případné záměně $\alpha_2 \mapsto \alpha_3$, $\alpha_3 \mapsto \alpha_2$ změní $\beta_1 - \beta_2$ znaménko).

TRIK: Označme $\gamma_1 = \alpha_1 + \rho\alpha_2 + \rho^2\alpha_3$, $\gamma_2 = \alpha_1 + \rho^2\alpha_2 + \rho\alpha_3$, kde $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, a tedy $\rho^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a $\rho^3 = 1$. Protože $1 + \rho + \rho^2 = 0$, sečtením dostaneme

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2}{3}, \qquad \alpha_3 = \frac{\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2}{3}.$$

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$.

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$. Proto

$$\gamma_1^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d,$$
$$\gamma_2^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d.$$

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$. Proto

$$\gamma_1^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d,$$
$$\gamma_2^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d.$$

Z těchto rovností můžeme třetí odmocninou získat γ_1 a γ_2.

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$. Proto

$$\gamma_1^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2} c - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} d,$$
$$\gamma_2^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \tfrac{3\sqrt{3}}{2} i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2} c + \tfrac{3\sqrt{3}}{2} d.$$

Z těchto rovností můžeme třetí odmocninou získat γ_1 a γ_2.
Máme tři možnosti, jak zvolit γ_1.

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$. Proto

$$\gamma_1^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d,$$
$$\gamma_2^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d.$$

Z těchto rovností můžeme třetí odmocninou získat γ_1 a γ_2. Máme tři možnosti, jak zvolit γ_1. Touto volbou zvolíme i γ_2, neboť

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_2 &= (\alpha_1 + \rho\alpha_2 + \rho^2\alpha_3)(\alpha_1 + \rho^2\alpha_2 + \rho\alpha_3) = \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = -3b.\end{aligned}$$

Umocněním na třetí po úpravě dostaneme

$$\gamma_1^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho\beta_1 + 3\rho^2\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$
$$\gamma_2^3 = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 3\rho^2\beta_1 + 3\rho\beta_2 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Pomocí algoritmu z teorie symetrických polynomů odvodíme $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$, a tedy $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = -3c$. Proto

$$\gamma_1^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d,$$
$$\gamma_2^3 = -9c - \tfrac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}i(\beta_1 - \beta_2) = -\tfrac{27}{2}c + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}d.$$

Z těchto rovností můžeme třetí odmocninou získat γ_1 a γ_2.
Máme tři možnosti, jak zvolit γ_1. Touto volbou zvolíme i γ_2, neboť

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_2 &= (\alpha_1 + \rho\alpha_2 + \rho^2\alpha_3)(\alpha_1 + \rho^2\alpha_2 + \rho\alpha_3) = \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = -3b.\end{aligned}$$

Jiná volba γ_1 by jen zaměnila označení kořenů, neboť
$\rho\gamma_1 = \alpha_3 + \rho\alpha_1 + \rho^2\alpha_2$ a $\rho^2\gamma_1 = \alpha_2 + \rho\alpha_3 + \rho^2\alpha_1$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Zadaný polynom f však má racionální kořen.

Příklad užití Cardanových vzorců

<u>Příklad 4.</u> Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

<u>Řešení.</u> Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Zadaný polynom f však má racionální kořen. Víme, že racionálním kořenem polynomu f může být pouze některé z čísel ± 1, ± 2, dosazením zjistíme, že kořenem je číslo 1.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Zadaný polynom f však má racionální kořen. Víme, že racionálním kořenem polynomu f může být pouze některé z čísel ± 1, ± 2, dosazením zjistíme, že kořenem je číslo 1. Musí tedy platit $\alpha_1 = 1$, což z uvedeného vyjádření není vidět.

Příklad užití Cardanových vzorců

Příklad 4. Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

Řešení. Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Zadaný polynom f však má racionální kořen. Víme, že racionálním kořenem polynomu f může být pouze některé z čísel ± 1, ± 2, dosazením zjistíme, že kořenem je číslo 1. Musí tedy platit $\alpha_1 = 1$, což z uvedeného vyjádření není vidět. Dostáváme rozklad
$f = (x - 1)(x^2 + x + 2)$, odkud $\alpha_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $\alpha_3 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

Příklad užití Cardanových vzorců

<u>*Příklad 4.*</u> Hledejme kořeny polynomu $f = x^3 + x - 2$ v $\mathbb{C}$.

<u>*Řešení.*</u> Je tedy $b = 1$, $c = -2$, pak $d = \sqrt{4b^3 + 27c^2} = 4\sqrt{7}$.
Proto $\gamma_1^3 = -\frac{27}{2}c - \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 - 6\sqrt{21}$,
$\gamma_2^3 = -\frac{27}{2}c + \frac{3\sqrt{3}}{2}d = 27 + 6\sqrt{21}$.
To jsou reálná čísla, můžeme tedy zvolit $\gamma_1 = \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Protože $\gamma_1\gamma_2 = -3 \in \mathbb{R}$, je pak $\gamma_2 = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} \in \mathbb{R}$.
Kořeny polynomu f tedy jsou $\alpha_1 = \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2) \in \mathbb{R}$,
$\alpha_2 = \frac{1}{3}(\rho^2\gamma_1 + \rho\gamma_2)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(\rho\gamma_1 + \rho^2\gamma_2)$.

Zadaný polynom f však má racionální kořen. Víme, že racionálním kořenem polynomu f může být pouze některé z čísel ± 1, ± 2, dosazením zjistíme, že kořenem je číslo 1. Musí tedy platit $\alpha_1 = 1$, což z uvedeného vyjádření není vidět. Dostáváme rozklad
$f = (x - 1)(x^2 + x + 2)$, odkud $\alpha_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $\alpha_3 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.
To bychom z Cardanových vzorců dostali, jen kdybychom postřehli, že $\left(\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \pm \frac{27}{8}\sqrt{21} + \frac{189}{8} \pm \frac{21}{8}\sqrt{21} = 27 \pm 6\sqrt{21}$.

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3.

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$.

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ polynomu f (kde každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost) pak tedy platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ polynomu f (kde každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost) pak tedy platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Definujme $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jako v příkladu 3, pak

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_2)^2, \\
\beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_3)^2, \\
\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_4)^2.
\end{aligned}$$

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ polynomu f (kde každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost) pak tedy platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Definujme $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jako v příkladu 3, pak

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_2)^2, \\
\beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_3)^2, \\
\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_4)^2.
\end{aligned}$$

Z příkladu 3 víme, že $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jsou kořeny polynomu

$$g(x) = x^3 - 2bx^2 + (b^2 - 4d)x + c^2,$$

kde jsme využili $a = 0$.

Kořeny polynomu čtvrtého stupně

Libovolný polynom $f = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{C}[x]$ lze substitucí $y = x + \frac{a}{4}$ vyjádřit jako polynom čtvrtého stupně proměnné y, který má nulový koeficient u y^3. Proto bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Pro kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ polynomu f (kde každý kořen je zde uveden tolikrát, kolik je jeho násobnost) pak tedy platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Definujme $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jako v příkladu 3, pak

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_2)^2, \\
\beta_2 &= (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) = -(\alpha_1 + \alpha_3)^2, \\
\beta_3 &= (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3) = -(\alpha_1 + \alpha_4)^2.
\end{aligned}$$

Z příkladu 3 víme, že $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jsou kořeny polynomu

$$g(x) = x^3 - 2bx^2 + (b^2 - 4d)x + c^2,$$

kde jsme využili $a = 0$. Je tedy možné pomocí Cardanových vzorců získat $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, odkud po odmocnění při vhodné volbě znamének snadným výpočtem dostaneme kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu."

Reciproké polynomy

<u>*Definice.*</u> Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá <u>**reciproký**</u>, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu.“ Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu.“ Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

Věta. *Nechť je dáno těleso R a reciproký polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.*

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu." Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

Věta. Nechť je dáno těleso R a reciproký polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Pak pro každý kořen $\alpha \in R$ polynomu f platí, že také $\alpha^{-1} \in R$ je kořen polynomu f.

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu." Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

Věta. *Nechť je dáno těleso R a reciproký polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Pak pro každý kořen $\alpha \in R$ polynomu f platí, že také $\alpha^{-1} \in R$ je kořen polynomu f.*

Důkaz. Protože $a_0 \neq 0$, platí $\alpha \neq 0$, a tedy existuje $\alpha^{-1} \in R$.

Reciproké polynomy

Definice. Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **reciproký**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu.“ Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

Věta. Nechť je dáno těleso R a reciproký polynom $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Pak pro každý kořen $\alpha \in R$ polynomu f platí, že také $\alpha^{-1} \in R$ je kořen polynomu f.

Důkaz. Protože $a_0 \neq 0$, platí $\alpha \neq 0$, a tedy existuje $\alpha^{-1} \in R$. Zřejmě platí $\alpha^n \cdot f(\alpha^{-1}) = a_n + a_{n-1}\alpha + \cdots + a_1 \alpha^{n-1} + a_0 \alpha^n$.

Reciproké polynomy

<u>Definice.</u> Polynom $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, kde R je těleso, se nazývá **<u>reciproký</u>**, jestliže $a_0 \neq 0$ a pro každé $i = 0, 1, \ldots, n$ platí $a_{n-i} = a_i$.

Nepřesně lze říci, že polynom je reciproký, jestliže nemá kořen nulu a „dostaneme totéž, ať už čteme jeho koeficienty zepředu nebo zezadu.“ Důvod, proč se tyto polynomy nazývají reciproké, naznačí následující věta.

<u>Věta.</u> Nechť je dáno těleso R a reciproký polynom $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$. Pak pro každý kořen $\alpha \in R$ polynomu f platí, že také $\alpha^{-1} \in R$ je kořen polynomu f.

<u>Důkaz.</u> Protože $a_0 \neq 0$, platí $\alpha \neq 0$, a tedy existuje $\alpha^{-1} \in R$. Zřejmě platí $\alpha^n \cdot f(\alpha^{-1}) = a_n + a_{n-1}\alpha + \cdots + a_1\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$. Užitím $a_{n-i} = a_i$ dostaneme $\alpha^n \cdot f(\alpha^{-1}) = f(\alpha) = 0$, odkud $f(\alpha^{-1}) = 0$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n-1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \big(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\big)$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \big(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\big)$.

Víme, že libovolný symetrický polynom dvou proměnných x_1, x_2 je možné zapsat jako hodnotu vhodého polynomu v elementárních symetrických polynomech $s_1 = x_1 + x_2$ a $s_2 = x_1 x_2$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1)\cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n-1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \big(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\big)$.

Víme, že libovolný symetrický polynom dvou proměnných x_1, x_2 je možné zapsat jako hodnotu vhodého polynomu v elementárních symetrických polynomech $s_1 = x_1 + x_2$ a $s_2 = x_1x_2$. Platí to tedy i pro polynom $x_1^k + x_2^k$, kde k je libovolné přirozené číslo.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \big(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\big)$.

Víme, že libovolný symetrický polynom dvou proměnných x_1, x_2 je možné zapsat jako hodnotu vhodého polynomu v elementárních symetrických polynomech $s_1 = x_1 + x_2$ a $s_2 = x_1 x_2$. Platí to tedy i pro polynom $x_1^k + x_2^k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Proto můžeme vyjádřit hodnotu $\alpha^k + \alpha^{-k}$ tohoto polynomu v α, α^{-1} pomocí hodnot $s_1(\alpha, \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1}$ a $s_2(\alpha, \alpha^{-1}) = 1$.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \big(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\big)$.

Víme, že libovolný symetrický polynom dvou proměnných x_1, x_2 je možné zapsat jako hodnotu vhodého polynomu v elementárních symetrických polynomech $s_1 = x_1 + x_2$ a $s_2 = x_1 x_2$. Platí to tedy i pro polynom $x_1^k + x_2^k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Proto můžeme vyjádřit hodnotu $\alpha^k + \alpha^{-k}$ tohoto polynomu v α, α^{-1} pomocí hodnot $s_1(\alpha, \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1}$ a $s_2(\alpha, \alpha^{-1}) = 1$.

Podmínka $f(\alpha) = 0$ proto vede na to, že $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$ je kořenem jistého polynomu stupně r.

Hledání kořenů reciprokých polynomů

Pro dané těleso R hledejme kořeny daného reciprokého polynomu $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$.

Snadno se nahlédne, že je-li $n = \mathrm{st}(f)$ liché číslo, platí $f(-1) = 0$. Pak $f = (x+1) \cdot g$ pro vhodný polynom $g \in R[x]$. Přitom $\mathrm{st}(g) = n - 1$ je sudý. Lze dokázat, že polynom g je také reciproký.

Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že polynom f je sudého stupně $n = \mathrm{st}(f) = 2r$. Pak pro libovolné $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ platí $f(\alpha) = \alpha^r \cdot \left(a_0(\alpha^r + \alpha^{-r}) + a_1(\alpha^{r-1} + \alpha^{1-r}) + \cdots + a_r\right)$.

Víme, že libovolný symetrický polynom dvou proměnných x_1, x_2 je možné zapsat jako hodnotu vhodého polynomu v elementárních symetrických polynomech $s_1 = x_1 + x_2$ a $s_2 = x_1 x_2$. Platí to tedy i pro polynom $x_1^k + x_2^k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Proto můžeme vyjádřit hodnotu $\alpha^k + \alpha^{-k}$ tohoto polynomu v α, α^{-1} pomocí hodnot $s_1(\alpha, \alpha^{-1}) = \alpha + \alpha^{-1}$ a $s_2(\alpha, \alpha^{-1}) = 1$.

Podmínka $f(\alpha) = 0$ proto vede na to, že $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$ je kořenem jistého polynomu stupně r. Ze znalosti β pak lze určit α řešením kvadratické rovnice.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$.
Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$. Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$. Pak $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \beta^2 - 2$ a dostáváme kvadratickou rovnici $6\beta^2 - 5\beta - 50 = 0$ s diskriminantem $(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225 = 35^2$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$. Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$. Pak $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \beta^2 - 2$ a dostáváme kvadratickou rovnici $6\beta^2 - 5\beta - 50 = 0$ s diskriminantem $(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225 = 35^2$.

Tato rovnice má řešení $\beta_1 = \frac{5+35}{12} = \frac{10}{3}$, $\beta_2 = \frac{5-35}{12} = -\frac{5}{2}$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$. Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$. Pak $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \beta^2 - 2$ a dostáváme kvadratickou rovnici $6\beta^2 - 5\beta - 50 = 0$ s diskriminantem $(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225 = 35^2$.

Tato rovnice má řešení $\beta_1 = \frac{5+35}{12} = \frac{10}{3}$, $\beta_2 = \frac{5-35}{12} = -\frac{5}{2}$.

Případ $\beta_1 = \frac{10}{3}$ vede na $\alpha^2 - \frac{10}{3}\alpha + 1 = 0$ s kořeny $\alpha_1 = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

<u>*Příklad 5.*</u> Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

<u>*Řešení.*</u> Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$.
Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$. Pak $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \beta^2 - 2$ a dostáváme kvadratickou rovnici $6\beta^2 - 5\beta - 50 = 0$ s diskriminantem $(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225 = 35^2$.

Tato rovnice má řešení $\beta_1 = \frac{5+35}{12} = \frac{10}{3}$, $\beta_2 = \frac{5-35}{12} = -\frac{5}{2}$.

Případ $\beta_1 = \frac{10}{3}$ vede na $\alpha^2 - \frac{10}{3}\alpha + 1 = 0$ s kořeny $\alpha_1 = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$.
Případ $\beta_2 = -\frac{5}{2}$ dává $\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha + 1 = 0$ s kořeny $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$.

Příklad hledání kořenů reciprokého polynomu

Příklad 5. Nalezněte všechny kořeny polynomu
$f = 6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$.

Řešení. Polynom f je reciproký lichého stupně, proto jej vydělíme polynomem $x + 1$ a dostaneme $f = (x + 1) \cdot g$ pro polynom $g = 6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6$. Hledáme tedy nenulové $\alpha \in \mathbb{C}$ tak, aby $6\alpha^4 - 5\alpha^3 - 38\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$.

Vydělením α^2 a úpravou $6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) - 5(\alpha + \alpha^{-1}) - 38 = 0$.
Označme $\beta = \alpha + \alpha^{-1}$. Pak $\alpha^2 + \alpha^{-2} = \beta^2 - 2$ a dostáváme kvadratickou rovnici $6\beta^2 - 5\beta - 50 = 0$ s diskriminantem $(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-50) = 1225 = 35^2$.

Tato rovnice má řešení $\beta_1 = \frac{5+35}{12} = \frac{10}{3}$, $\beta_2 = \frac{5-35}{12} = -\frac{5}{2}$.

Případ $\beta_1 = \frac{10}{3}$ vede na $\alpha^2 - \frac{10}{3}\alpha + 1 = 0$ s kořeny $\alpha_1 = 3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$.
Případ $\beta_2 = -\frac{5}{2}$ dává $\alpha^2 + \frac{5}{2}\alpha + 1 = 0$ s kořeny $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$.
Posledním kořenem polynomu f je $\alpha_5 = -1$.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů. Nebyl však schopen dokázat, že takové řešení neexistuje.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů. Nebyl však schopen dokázat, že takové řešení neexistuje.

Paolo Ruffini (1765 – 1822) v roce 1799 dal (nekompletní) důkaz, že existují rovnice 5 stupně, jejichž kořeny nelze vyjádřit vzorcem (s konečně mnoha operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a počítání odmocnin).

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů. Nebyl však schopen dokázat, že takové řešení neexistuje.

Paolo Ruffini (1765 – 1822) v roce 1799 dal (nekompletní) důkaz, že existují rovnice 5 stupně, jejichž kořeny nelze vyjádřit vzorcem (s konečně mnoha operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a počítání odmocnin). Jeho práce však byla přehlížena (měla asi 500 stran), až mnohem později se zjistilo, že důkaz nebyl kompletní.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů. Nebyl však schopen dokázat, že takové řešení neexistuje.
Paolo Ruffini (1765 – 1822) v roce 1799 dal (nekompletní) důkaz, že existují rovnice 5 stupně, jejichž kořeny nelze vyjádřit vzorcem (s konečně mnoha operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a počítání odmocnin). Jeho práce však byla přehlížena (měla asi 500 stran), až mnohem později se zjistilo, že důkaz nebyl kompletní.
Niels Henrik Abel (1802 – 1829, zemřel na tuberkulózu) dokázal (pomocí teorie grup nezávisle na Galoisovi) v roce 1824, že pro kořeny rovnic pátého a vyšších stupňů neexistuje obecný vzorec.

Rovnice vyšších stupňů

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) kolem 1770 sjednotil mnoho různých známých triků užívaných pro řešení rovnic. Studoval permutace kořenů a definoval tzv. Lagrangeovy resolventy. Marně hledal obecné řešení rovnic 5. a vyšších stupňů. Nebyl však schopen dokázat, že takové řešení neexistuje.

Paolo Ruffini (1765 – 1822) v roce 1799 dal (nekompletní) důkaz, že existují rovnice 5 stupně, jejichž kořeny nelze vyjádřit vzorcem (s konečně mnoha operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a počítání odmocnin). Jeho práce však byla přehlížena (měla asi 500 stran), až mnohem později se zjistilo, že důkaz nebyl kompletní.

Niels Henrik Abel (1802 – 1829, zemřel na tuberkulózu) dokázal (pomocí teorie grup nezávisle na Galoisovi) v roce 1824, že pro kořeny rovnic pátého a vyšších stupňů neexistuje obecný vzorec.

Évariste Galois (1811 – 1832, zemřel po souboji), pomocí teorie grup, kterou objevil nezávisle na Abelovi, našel kritérium, kterým lze určit, zda kořeny polynomu lze zapsat pomocí vzorce (s konečně mnoha operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a počítání odmocnin).

Co je obsahem algebry?

Od počátku 19. století, na základě objevů Abela, Galoise a na ně navazujících matematiků hlavním obsahem algebry přestává být řešení algebraických rovnic (tj. hledání kořenů polynomů), ale stává se jím studium algebraických struktur (grup, okruhů atd.).

Co je obsahem algebry?

Od počátku 19. století, na základě objevů Abela, Galoise a na ně navazujících matematiků hlavním obsahem algebry přestává být řešení algebraických rovnic (tj. hledání kořenů polynomů), ale stává se jím studium algebraických struktur (grup, okruhů atd.).

Jako příklad lze uvést Galoisovu teorii studující grupy symetrií polynomů.

Co je obsahem algebry?

Od počátku 19. století, na základě objevů Abela, Galoise a na ně navazujících matematiků hlavním obsahem algebry přestává být řešení algebraických rovnic (tj. hledání kořenů polynomů), ale stává se jím studium algebraických struktur (grup, okruhů atd.).

Jako příklad lze uvést Galoisovu teorii studující grupy symetrií polynomů. Totiž to, zda kořeny daného polynomu je možné vyjádřit algebraickým výrazem obsahujícím odmocniny, nepoznáme přímo na onom polynomu, ale je možné to zjistit z jeho grupy symetrií.

Co je obsahem algebry?

Od počátku 19. století, na základě objevů Abela, Galoise a na ně navazujících matematiků hlavním obsahem algebry přestává být řešení algebraických rovnic (tj. hledání kořenů polynomů), ale stává se jím studium algebraických struktur (grup, okruhů atd.).

Jako příklad lze uvést Galoisovu teorii studující grupy symetrií polynomů. Totiž to, zda kořeny daného polynomu je možné vyjádřit algebraickým výrazem obsahujícím odmocniny, nepoznáme přímo na onom polynomu, ale je možné to zjistit z jeho grupy symetrií.

Toto téma však už v tomto předmětu otvírat nebudeme. Je to jedním z témat navazujícího předmětu M3150 Algebra II.