

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R .

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R . Tuto konstrukci můžeme opakovat pro okruh $R[x]$ a sestrojít okruh polynomů nad ním, jen musíme odlišit původní a nově zavedenou proměnnou.

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R . Tuto konstrukci můžeme opakovat pro okruh $R[x]$ a sestrojít okruh polynomů nad ním, jen musíme odlišit původní a nově zaváděnou proměnnou.

Definice. Necht' R je okruh. Okruhem polynomů dvou proměnných nad okruhem R rozumíme okruh $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$.

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R . Tuto konstrukci můžeme opakovat pro okruh $R[x]$ a sestrojít okruh polynomů nad ním, jen musíme odlišit původní a nově zaváděnou proměnnou.

Definice. Necht' R je okruh. Okruhem polynomů dvou proměnných nad okruhem R rozumíme okruh $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$. Dále postupujeme indukcí: pro libovolné přirozené číslo n je okruhem polynomů n proměnných nad okruhem R okruh $R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n]$.

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R . Tuto konstrukci můžeme opakovat pro okruh $R[x]$ a sestrojit okruh polynomů nad ním, jen musíme odlišit původní a nově zaváděnou proměnnou.

Definice. Necht' R je okruh. Okruhem polynomů dvou proměnných nad okruhem R rozumíme okruh $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$. Dále postupujeme indukcí: pro libovolné přirozené číslo n je okruhem polynomů n proměnných nad okruhem R okruh

$$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

Prvky okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme polynomy n proměnných nad okruhem R , zřejmě je každý takový polynom možné zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}\dots x_{i_m}^{k_m}$, kde $a \in R$, $0 \leq m \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ a $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

Polynomy více proměnných

Poznámka. V Algebře I jsme k libovolnému okruhu R sestrojili okruh polynomů $R[x]$ nad okruhem R . Tuto konstrukci můžeme opakovat pro okruh $R[x]$ a sestrojit okruh polynomů nad ním, jen musíme odlišit původní a nově zaváděnou proměnnou.

Definice. Necht' R je okruh. Okruhem polynomů dvou proměnných nad okruhem R rozumíme okruh $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$. Dále postupujeme indukcí: pro libovolné přirozené číslo n je okruhem polynomů n proměnných nad okruhem R okruh

$$R[x_1, \dots, x_n] = (R[x_1, \dots, x_{n-1}])[x_n].$$

Prvky okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme polynomy n proměnných nad okruhem R , zřejmě je každý takový polynom možné zapsat jako

konečný součet sčítanců tvaru $ax_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_m}^{k_m}$, kde $a \in R$,

$0 \leq m \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ a $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

Pro usnadnění zápisu pro každé $i = 1, \dots, n$ definujeme $x_i^0 = 1$ (jednička okruhu R), pak je tedy tento sčítanec možno psát ve tvaru $ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Je-li $f \neq 0$, lze při zápisu f navíc požadovat, aby se žádný člen neopakoval a koeficienty byly nenulové.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Je-li $f \neq 0$, lze při zápisu f navíc požadovat, aby se žádný člen neopakoval a koeficienty byly nenulové. V tom případě členy v tomto součtu použité nazýváme členy polynomu f , o použitém koeficientu takového členu mluvíme jako o koeficientu polynomu f u tohoto členu.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Je-li $f \neq 0$, lze při zápisu f navíc požadovat, aby se žádný člen neopakoval a koeficienty byly nenulové. V tom případě členy v tomto součtu použité nazýváme členy polynomu f , o použitém koeficientu takového členu mluvíme jako o koeficientu polynomu f u tohoto členu.

Stupněm členu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ rozumíme součet $r_1 + \dots + r_n$.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Je-li $f \neq 0$, lze při zápisu f navíc požadovat, aby se žádný člen neopakoval a koeficienty byly nenulové. V tom případě členy v tomto součtu použité nazýváme členy polynomu f , o použitém koeficientu takového členu mluvíme jako o koeficientu polynomu f u tohoto členu.

Stupněm členu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ rozumíme součet $r_1 + \dots + r_n$.

Stupněm $\text{st}(f)$ nenulového polynomu f rozumíme největší ze stupňů jeho členů, stupeň nulového polynomu klademe roven $-\infty$.

Stupeň polynomu více proměnných

Každý polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ lze tedy zapsat jako konečný součet sčítanců tvaru $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$, kde $a \in R$ a $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}_0$. Součinu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ říkáme člen, prvku a koeficient tohoto členu.

Je-li $f \neq 0$, lze při zápisu f navíc požadovat, aby se žádný člen neopakoval a koeficienty byly nenulové. V tom případě členy v tomto součtu použité nazýváme členy polynomu f , o použitém koeficientu takového členu mluvíme jako o koeficientu polynomu f u tohoto členu.

Stupněm členu $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ rozumíme součet $r_1 + \dots + r_n$.

Stupněm $\text{st}(f)$ nenulového polynomu f rozumíme největší ze stupňů jeho členů, stupeň nulového polynomu klademe roven $-\infty$.

Mají-li všechny členy polynomu f stejný stupeň, hovoříme o homogenním polynomu (často se homogenním polynomům také říká forma, například lineární forma, kvadratická forma, ...).

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R .

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou

$$ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$$

sečteme příslušné koeficienty v okruhu R .

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou

$$ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$$

sečteme příslušné koeficienty v okruhu R . V případě $a + b = 0$ příslušný člen v zápisu polynomu $f + g$ nevedeme.

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ sečteme příslušné koeficienty v okruhu R . V případě $a + b = 0$ příslušný člen v zápisu polynomu $f + g$ nevedeme.

Při násobení polynomů roznásobujeme součty užitím distributivního zákona, je tedy pouze třeba si rozmyslet, jak upravit součin $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} \cdot bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$.

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ sečteme příslušné koeficienty v okruhu R . V případě $a + b = 0$ příslušný člen v zápisu polynomu $f + g$ nevedeme.

Při násobení polynomů roznásobujeme součty užitím distributivního zákona, je tedy pouze třeba si rozmyslet, jak upravit součin $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} \cdot bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Uvědomme si, že i v případě, kdy okruh R není komutativní, tak v okruhu $R[x]$ platí $a \cdot x = ax = x \cdot a$ pro každé $a \in R$.

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ sečteme příslušné koeficienty v okruhu R . V případě $a + b = 0$ příslušný člen v zápisu polynomu $f + g$ nevedeme.

Při násobení polynomů roznásobujeme součty užitím distributivního zákona, je tedy pouze třeba si rozmyslet, jak upravit součin $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} \cdot bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Uvědomme si, že i v případě, kdy okruh R není komutativní, tak v okruhu $R[x]$ platí $a \cdot x = ax = x \cdot a$ pro každé $a \in R$. Každá proměnná tedy komutuje s každou konstantou, tedy v okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ platí $a \cdot x_i = x_i \cdot a$, $x_j \cdot x_i = x_i \cdot x_j$ pro každé $a \in R$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Okruh polynomů více proměnných

Každý nenulový polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je tedy součtem několika členů vybavených koeficienty z okruhu R . Součet $f + g$ dvou takových polynomů provedeme sečtením těchto součtů, pokud nějaký člen je členem obou polynomů, úpravou $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} + bx_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} = (a + b)x_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n}$ sečteme příslušné koeficienty v okruhu R . V případě $a + b = 0$ příslušný člen v zápisu polynomu $f + g$ neuvеdeme.

Při násobení polynomů roznásobujeme součty užitím distributivního zákona, je tedy pouze třeba si rozmyslet, jak upravit součin $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} \cdot bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Uvědomme si, že i v případě, kdy okruh R není komutativní, tak v okruhu $R[x]$ platí $a \cdot x = ax = x \cdot a$ pro každé $a \in R$. Každá proměnná tedy komutuje s každou konstantou, tedy v okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ platí $a \cdot x_i = x_i \cdot a$, $x_j \cdot x_i = x_i \cdot x_j$ pro každé $a \in R$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Proto $ax_1^{r_1}x_2^{r_2}\dots x_n^{r_n} \cdot bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} = (a \cdot b)x_1^{r_1+k_1}x_2^{r_2+k_2}\dots x_n^{r_n+k_n}$.

Zřejmě platí, že součinem libovolných homogenních polynomů je homogenní polynom.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto:
pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe
 $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak,
že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto:
pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe
 $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak,
že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$.
Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$
nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto:

pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe

$[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$.

Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$ nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Zřejmě (\mathbb{N}_0^n, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto: pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$.

Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$ nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Zřejmě (\mathbb{N}_0^n, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Řekneme, že člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, jestliže $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto: pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$. Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$ nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Zřejmě (\mathbb{N}_0^n, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Řekneme, že člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, jestliže $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$.

Člen nenulového polynomu $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, který je před všemi ostatními členy polynomu f , se nazývá vedoucí člen polynomu f , jeho koeficientu říkáme vedoucí koeficient polynomu f .

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme lexicografické uspořádání definované takto: pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$. Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$ nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Zřejmě (\mathbb{N}_0^n, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Řekneme, že člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, jestliže $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$.

Člen nenulového polynomu $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, který je před všemi ostatními členy polynomu f , se nazývá vedoucí člen polynomu f , jeho koeficientu říkáme vedoucí koeficient polynomu f .

Vedoucí člen ani vedoucí koeficient nulového polynomu nedefinujeme.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient polynomu

Na množině \mathbb{N}_0^n máme legikografické uspořádání definované takto: pro libovolné n -tice $[r_1, \dots, r_n], [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$ klademe $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$, právě když existuje $j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro každé i , $1 \leq i < j$ platí $r_i = k_i$ a současně $r_j < k_j$. Pak $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$ znamená $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$ nebo $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$.

Zřejmě (\mathbb{N}_0^n, \leq) je dobře uspořádaná množina.

Řekneme, že člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, jestliže $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$.

Člen nenulového polynomu $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, který je před všemi ostatními členy polynomu f , se nazývá vedoucí člen polynomu f , jeho koeficientu říkáme vedoucí koeficient polynomu f .

Vedoucí člen ani vedoucí koeficient nulového polynomu nedefinujeme.

Může se stát, že stupeň vedoucího členu polynomu f je menší než stupeň polynomu f .

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Případ $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$ lze dokázat podobně.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Případ $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$ lze dokázat podobně.

Důsledek. Necht' $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$ jsou nenulové polynomy.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Případ $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$ lze dokázat podobně.

Důsledek. Necht' $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$ jsou nenulové polynomy. Je-li součin vedoucích koeficientů polynomů f a g nenulový, pak vedoucí člen součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích členů polynomů f a g a vedoucí koeficient součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích koeficientů polynomů f a g .

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Případ $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$ lze dokázat podobně.

Důsledek. Necht' $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$ jsou nenulové polynomy. Je-li součin vedoucích koeficientů polynomů f a g nenulový, pak vedoucí člen součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích členů polynomů f a g a vedoucí koeficient součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích koeficientů polynomů f a g .

Poznámka. Pokud alespoň jeden z vedoucích koeficientů není dělitel nuly, je předpoklad o nenulovosti součinu vedoucích koeficientů splněn.

Vedoucí člen, vedoucí koeficient součinu polynomů

Věta. Necht' $[r_1, \dots, r_n] \leq [k_1, \dots, k_n]$, $[r'_1, \dots, r'_n] < [k'_1, \dots, k'_n]$.
Pak $[r_1 + r'_1, \dots, r_n + r'_n] < [k_1 + k'_1, \dots, k_n + k'_n]$.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve $[r_1, \dots, r_n] < [k_1, \dots, k_n]$. Pak existují $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ tak, že

$$r_j < k_j, \quad \forall i : 1 \leq i < j \implies r_i = k_i,$$

$$r'_{j'} < k'_{j'}, \quad \forall i : 1 \leq i < j' \implies r'_i = k'_i.$$

Označme $\ell = \min\{j, j'\}$, pak $r_\ell + r'_\ell < k_\ell + k'_\ell$ a pro každé i platí $1 \leq i < \ell \implies r_i + r'_i = k_i + k'_i$, což bylo třeba dokázat.

Případ $[r_1, \dots, r_n] = [k_1, \dots, k_n]$ lze dokázat podobně.

Důsledek. Necht' $f, g \in R[x_1, \dots, x_n]$ jsou nenulové polynomy. Je-li součin vedoucích koeficientů polynomů f a g nenulový, pak vedoucí člen součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích členů polynomů f a g a vedoucí koeficient součinu $f \cdot g$ je součinem vedoucích koeficientů polynomů f a g .

Poznámka. Pokud alespoň jeden z vedoucích koeficientů není dělitel nuly, je předpoklad o nenulovosti součinu vedoucích koeficientů splněn. To platí vždy, je-li R obor integrity.

Hodnoty polynomů více proměnných

Je-li R podokruh okruhu K , pak pro libovolné prvky $c_1, \dots, c_n \in K$ a libovolný polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ máme hodnotu $f(c_1, \dots, c_n) \in K$ polynomu f v c_1, \dots, c_n .

Hodnoty polynomů více proměnných

Je-li R podokruh okruhu K , pak pro libovolné prvky $c_1, \dots, c_n \in K$ a libovolný polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ máme hodnotu $f(c_1, \dots, c_n) \in K$ polynomu f v c_1, \dots, c_n .

Věta. Je-li R podokruh komutativního okruhu K , pak pro libovolné $c_1, \dots, c_n \in K$ je zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ homomorfismus okruhů.

Hodnoty polynomů více proměnných

Je-li R podokruh okruhu K , pak pro libovolné prvky $c_1, \dots, c_n \in K$ a libovolný polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ máme hodnotu $f(c_1, \dots, c_n) \in K$ polynomu f v c_1, \dots, c_n .

Věta. Je-li R podokruh komutativního okruhu K , pak pro libovolné $c_1, \dots, c_n \in K$ je zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ homomorfismus okruhů.

Předpoklad, že K je komutativní okruh, lze zeslabit:

Věta. Necht' R je podokruh okruhu K , necht' $c_1, \dots, c_n \in K$ splňují

- ▶ pro každé $a \in R$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $a \cdot c_i = c_i \cdot a$,
- ▶ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí $c_i \cdot c_j = c_j \cdot c_i$.

Hodnoty polynomů více proměnných

Je-li R podokruh okruhu K , pak pro libovolné prvky $c_1, \dots, c_n \in K$ a libovolný polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ máme hodnotu $f(c_1, \dots, c_n) \in K$ polynomu f v c_1, \dots, c_n .

Věta. Je-li R podokruh komutativního okruhu K , pak pro libovolné $c_1, \dots, c_n \in K$ je zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ homomorfismus okruhů.

Předpoklad, že K je komutativní okruh, lze zeslabit:

Věta. Necht' R je podokruh okruhu K , necht' $c_1, \dots, c_n \in K$ splňují

- ▶ pro každé $a \in R$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $a \cdot c_i = c_i \cdot a$,
- ▶ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí $c_i \cdot c_j = c_j \cdot c_i$.

Pak zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ je homomorfismus okruhů.

Hodnoty polynomů více proměnných

Je-li R podokruh okruhu K , pak pro libovolné prvky $c_1, \dots, c_n \in K$ a libovolný polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ máme hodnotu $f(c_1, \dots, c_n) \in K$ polynomu f v c_1, \dots, c_n .

Věta. Je-li R podokruh komutativního okruhu K , pak pro libovolné $c_1, \dots, c_n \in K$ je zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ homomorfismus okruhů.

Předpoklad, že K je komutativní okruh, lze zeslabit:

Věta. Nechť R je podokruh okruhu K , nechť $c_1, \dots, c_n \in K$ splňují

- ▶ pro každé $a \in R$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $a \cdot c_i = c_i \cdot a$,
- ▶ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí $c_i \cdot c_j = c_j \cdot c_i$.

Pak zobrazení $\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K$ určené předpisem $\varphi(f) = f(c_1, \dots, c_n)$ je homomorfismus okruhů.

Důkaz. Stačí pro libovolné $a, b \in R$, $r_1, \dots, r_n, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ si uvědomit, že za těchto předpokladů

$$ac_1^{r_1} c_2^{r_2} \dots c_n^{r_n} \cdot bc_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} = (a \cdot b) c_1^{r_1+k_1} c_2^{r_2+k_2} \dots c_n^{r_n+k_n}.$$

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Je-li R okruh s jednoznačným rozkladem, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh s jednoznačným rozkladem.

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Je-li R okruh s jednoznačným rozkladem, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh s jednoznačným rozkladem. Speciálně pro každé těleso T je okruh $T[x_1, \dots, x_n]$ okruhem s jednoznačným rozkladem.

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Je-li R okruh s jednoznačným rozkladem, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh s jednoznačným rozkladem. Speciálně pro každé těleso T je okruh $T[x_1, \dots, x_n]$ okruhem s jednoznačným rozkladem.

Okruhy $T[x_1, \dots, x_n]$ jsou důležité v algebraické geometrii při studiu algebraických ploch.

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Je-li R okruh s jednoznačným rozkladem, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh s jednoznačným rozkladem. Speciálně pro každé těleso T je okruh $T[x_1, \dots, x_n]$ okruhem s jednoznačným rozkladem.

Okruhy $T[x_1, \dots, x_n]$ jsou důležité v algebraické geometrii při studiu algebraických ploch. Teorie těchto okruhů pro $n > 1$ je však podstatně složitější než v případě $n = 1$.

Další teorie okruhu polynomů více proměnných

Okruh polynomů více proměnných vznikl iterováním konstrukce okruhu polynomů jedné proměnné. Proto některé výsledky o okruzích polynomů jedné proměnné nám dávají důsledky pro okruhy polynomů více proměnných:

Máme posloupnost do sebe vnořených podokruhů:

$$R \subsetneq R[x_1] \subsetneq R[x_1, x_2] \subsetneq \cdots \subsetneq R[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Je-li R obor integrity, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je oborem integrity.

Je-li R okruh s jednoznačným rozkladem, pak i $R[x_1, \dots, x_n]$ je okruh s jednoznačným rozkladem. Speciálně pro každé těleso T je okruh $T[x_1, \dots, x_n]$ okruhem s jednoznačným rozkladem.

Okruhy $T[x_1, \dots, x_n]$ jsou důležité v algebraické geometrii při studiu algebraických ploch. Teorie těchto okruhů pro $n > 1$ je však podstatně složitější než v případě $n = 1$. V této přednášce se zaměříme pouze na jeden aspekt teorie okruhů polynomů více proměnných: budeme studovat tzv. symetrické polynomy.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Příklad. Každý konstantní polynom $f \in R$ je symetrický.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Příklad. Každý konstantní polynom $f \in R$ je symetrický. Polynom $x_1^2 + x_2^2$ je symetrický polynom dvou proměnných, není však symetrický jako polynom tří proměnných.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Příklad. Každý konstantní polynom $f \in R$ je symetrický. Polynom $x_1^2 + x_2^2$ je symetrický polynom dvou proměnných, není však symetrický jako polynom tří proměnných.

Věta. Necht' R je okruh, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Příklad. Každý konstantní polynom $f \in R$ je symetrický. Polynom $x_1^2 + x_2^2$ je symetrický polynom dvou proměnných, není však symetrický jako polynom tří proměnných.

Věta. Necht' R je okruh, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$. Polynom f je symetrický, právě když pro každé $i \in \{2, \dots, n\}$ platí

$$f(x_i, x_2, \dots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f.$$

Symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme symetrický polynom (n proměnných), jestliže pro libovolnou permutaci α množiny $\{1, \dots, n\}$ platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}).$$

Poznámka. V předchozí definici znamená $f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$ hodnotu polynomu f v prvcích $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)} \in R[x_1, \dots, x_n]$. Vzhledem k tomu, že R je podokruhem okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$, má tato hodnota smysl. Poznamenejme, že $f(x_1, \dots, x_n) = f$.

Příklad. Každý konstantní polynom $f \in R$ je symetrický. Polynom $x_1^2 + x_2^2$ je symetrický polynom dvou proměnných, není však symetrický jako polynom tří proměnných.

Věta. Necht' R je okruh, $f \in R[x_1, \dots, x_n]$. Polynom f je symetrický, právě když pro každé $i \in \{2, \dots, n\}$ platí

$$f(x_i, x_2, \dots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \dots, x_n) = f.$$

Důkaz. Plyne z toho, že množina transpozic $\{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\}$ generuje grupu \mathbb{S}_n .

Elementární symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh.

Elementární symetrické polynomy

Definice. Nechť R je okruh. Následující polynomy $s_1, \dots, s_n \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme elementární symetrické polynomy n proměnných:

Elementární symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Následující polynomy $s_1, \dots, s_n \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme elementární symetrické polynomy n proměnných:

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

\vdots

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

\vdots

$$s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Elementární symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Následující polynomy $s_1, \dots, s_n \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme elementární symetrické polynomy n proměnných:

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

\vdots

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

\vdots

$$s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Poznámka. Zřejmě jsou elementární symetrické polynomy n proměnných skutečně symetrické polynomy n proměnných.

Elementární symetrické polynomy

Definice. Necht' R je okruh. Následující polynomy $s_1, \dots, s_n \in R[x_1, \dots, x_n]$ nazýváme elementární symetrické polynomy n proměnných:

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n,$$

\vdots

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

\vdots

$$s_n = x_1x_2 \dots x_n.$$

Poznámka. Zřejmě jsou elementární symetrické polynomy n proměnných skutečně symetrické polynomy n proměnných. Ukážeme, že naopak jakýkoli symetrický polynom n proměnných lze vyjádřit pomocí nich.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. *Nechť R je okruh, $n \in \mathbb{N}$.*

Podokruh symetrických polynomů

Věta. *Nechť R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.*

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Necht' R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Necht' R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$.
Necht' $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Necht' R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$. Necht' $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy. Protože proměnné komutují s libovolným prvkem okruhu R i mezi sebou, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{S}_n$ platí

$$(f \cdot g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) \cdot g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)})$$

Podokruh symetrických polynomů

Věta. *Nechť R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.*

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$.
Nechť $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy. Protože proměnné komutují s libovolným prvkem okruhu R i mezi sebou, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{S}_n$ platí

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) &= f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) \cdot g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = \\ &= f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

a tedy $f \cdot g \in S$.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Necht' R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$. Necht' $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy. Protože proměnné komutují s libovolným prvkem okruhu R i mezi sebou, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{S}_n$ platí

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) &= f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) \cdot g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = \\ &= f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

a tedy $f \cdot g \in S$. Proto také $-f = (-1) \cdot f \in S$.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Necht' R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$. Necht' $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy. Protože proměnné komutují s libovolným prvkem okruhu R i mezi sebou, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{S}_n$ platí

$$(f \cdot g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) \cdot g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n),$$

a tedy $f \cdot g \in S$. Proto také $-f = (-1) \cdot f \in S$. Podobně

$$(f+g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) + g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) = (f+g)(x_1, \dots, x_n),$$

a tedy $f+g \in S$.

Podokruh symetrických polynomů

Věta. Nechť R je okruh, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina S všech symetrických polynomů n proměnných tvoří podokruh okruhu $R[x_1, \dots, x_n]$ a platí $R \subseteq S$.

Důkaz. Konstantní polynomy $a \in R$ jsou symetrické, tedy $R \subseteq S$. Nechť $f, g \in S$ jsou symetrické polynomy. Protože proměnné komutují s libovolným prvkem okruhu R i mezi sebou, pro libovolné $\alpha \in \mathbb{S}_n$ platí

$$(f \cdot g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) \cdot g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \cdot g(x_1, \dots, x_n) = (f \cdot g)(x_1, \dots, x_n),$$

a tedy $f \cdot g \in S$. Proto také $-f = (-1) \cdot f \in S$. Podobně

$$(f+g)(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) + g(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) = (f+g)(x_1, \dots, x_n),$$

a tedy $f + g \in S$.

Důsledek. Pro libovolný $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ platí, že hodnota $h(s_1, \dots, s_n)$ polynomu h v elementárních symetrických polynomech s_1, \dots, s_n je symetrický polynom.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Lemma 1. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, je symetrický polynom n proměnných.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Lemma 1. *Nechť R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, je symetrický polynom n proměnných. Pak vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.*

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Lemma 1. Necht R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, je symetrický polynom n proměnných. Pak vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je člen polynomu f , přičemž platí $r_i < r_{i+1}$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Lemma 1. *Nechť R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, je symetrický polynom n proměnných. Pak vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je člen polynomu f , přičemž platí $r_i < r_{i+1}$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Protože f je symetrický, aplikací transpozice $(i, i+1)$ dostaneme, že f má také člen

$$x_1^{r_1} \dots x_{i-1}^{r_{i-1}} x_i^{r_{i+1}} x_{i+1}^{r_i} x_{i+2}^{r_{i+2}} \dots x_n^{r_n},$$

který je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$.

Vedoucí člen symetrického polynomu

Poznámka. Elementární symetrické polynomy komutují s konstantními polynomy i mezi sebou. Proto je zobrazení $\Phi : R[x_1, \dots, x_n] \rightarrow S$ určené předpisem $\Phi(f) = f(s_1, \dots, s_n)$ homomorfismus okruhů.

Naším cílem je ukázat, že Φ je izomorfismus.

Ekvivalentně: každý symetrický polynom je hodnotou právě jednoho polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Lemma 1. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, $f \neq 0$, je symetrický polynom n proměnných. Pak vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je člen polynomu f , přičemž platí $r_i < r_{i+1}$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Protože f je symetrický, aplikací transpozice $(i, i+1)$ dostaneme, že f má také člen

$$x_1^{r_1} \dots x_{i-1}^{r_{i-1}} x_i^{r_{i+1}} x_{i+1}^{r_i} x_{i+2}^{r_{i+2}} \dots x_n^{r_n},$$

který je před členem $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$. Člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ není vedoucí.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$. Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1 - r_2} s_2^{r_2 - r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n}$.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje

$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1 - r_2} s_2^{r_2 - r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n}$.

Protože vedoucí člen polynomu s_k je $x_1 \dots x_k$, je vedoucí člen polynomu t roven $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tedy stejný jako polynomu f .

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje

$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1 - r_2} s_2^{r_2 - r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n}$.

Protože vedoucí člen polynomu s_k je $x_1 \dots x_k$, je vedoucí člen polynomu t roven $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tedy stejný jako polynomu f .

Označíme-li a vedoucí koeficient polynomu f , je $g = f - at$ symetrický polynom.

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1 - r_2} s_2^{r_2 - r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n}$.

Protože vedoucí člen polynomu s_k je $x_1 \dots x_k$, je vedoucí člen polynomu t roven $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tedy stejný jako polynomu f .

Označíme-li a vedoucí koeficient polynomu f , je $g = f - at$ symetrický polynom. Pokud $g \neq 0$, je vedoucí člen polynomu f před vedoucím členem polynomu g .

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1-r_2} s_2^{r_2-r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} s_n^{r_n}$.

Protože vedoucí člen polynomu s_k je $x_1 \dots x_k$, je vedoucí člen polynomu t roven $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tedy stejný jako polynomu f .

Označíme-li a vedoucí koeficient polynomu f , je $g = f - at$ symetrický polynom. Pokud $g \neq 0$, je vedoucí člen polynomu f před vedoucím členem polynomu g . Protože

$at = \Phi(ax_1^{r_1-r_2} x_2^{r_2-r_3} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} x_n^{r_n})$, z platnosti věty pro polynom g plyne její platnost pro polynom f .

Zobrazení Φ je surjektivní

Lemma 2. Homomorfismus Φ je surjekce, tj. pro každý symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ existuje polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ tak, že $\Phi(h) = f$.

Důkaz. Je-li $f = 0$, věta platí pro $h = 0$. Předpokládejme, že $f \neq 0$.

Podle lemmatu 1 vedoucí člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ polynomu f splňuje $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. Označme $t = s_1^{r_1 - r_2} s_2^{r_2 - r_3} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n}$.

Protože vedoucí člen polynomu s_k je $x_1 \dots x_k$, je vedoucí člen polynomu t roven $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$, tedy stejný jako polynomu f .

Označíme-li a vedoucí koeficient polynomu f , je $g = f - at$ symetrický polynom. Pokud $g \neq 0$, je vedoucí člen polynomu f před vedoucím členem polynomu g . Protože

$at = \Phi(ax_1^{r_1 - r_2} x_2^{r_2 - r_3} \dots x_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} x_n^{r_n})$, z platnosti věty pro polynom g plyne její platnost pro polynom f .

Protože za vedoucím členem polynomu t podle lemmatu 1 může být jen konečně mnoho vedoucích členů symetrických polynomů, po konečně mnoha těchto redukcích dostaneme nulový polynom.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Vedoucí koeficient tohoto polynomu je a , jeho vedoucí člen je $x_1^{r_1+r_2+\dots+r_n} x_2^{r_2+r_3+\dots+r_n} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}+r_n} x_n^{r_n}$.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Vedoucí koeficient tohoto polynomu je a , jeho vedoucí člen je $x_1^{r_1+r_2+\dots+r_n} x_2^{r_2+r_3+\dots+r_n} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}+r_n} x_n^{r_n}$.

Pro různé n -tice $[r_1, \dots, r_n]$ a $[k_1, \dots, k_n]$ tedy platí, že pro libovolné nenulové $a, b \in R$ jsou vedoucí členy polynomů $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n})$ a $\Phi(bx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ různé.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Vedoucí koeficient tohoto polynomu je a , jeho vedoucí člen je $x_1^{r_1+r_2+\dots+r_n} x_2^{r_2+r_3+\dots+r_n} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}+r_n} x_n^{r_n}$.

Pro různé n -tice $[r_1, \dots, r_n]$ a $[k_1, \dots, k_n]$ tedy platí, že pro libovolné nenulové $a, b \in R$ jsou vedoucí členy polynomů $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n})$ a $\Phi(bx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ různé.

Nechť $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ je ten člen polynomu h , jehož obraz v homomorfismu Φ má vedoucí člen před vedoucími členy obrazů ostatních členů.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Vedoucí koeficient tohoto polynomu je a , jeho vedoucí člen je $x_1^{r_1+r_2+\dots+r_n} x_2^{r_2+r_3+\dots+r_n} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}+r_n} x_n^{r_n}$.

Pro různé n -tice $[r_1, \dots, r_n]$ a $[k_1, \dots, k_n]$ tedy platí, že pro libovolné nenulové $a, b \in R$ jsou vedoucí členy polynomů $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n})$ a $\Phi(bx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ různé.

Nechť $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ je ten člen polynomu h , jehož obraz v homomorfismu Φ má vedoucí člen před vedoucími členy obrazů ostatních členů. Pak vedoucí člen polynomu $\Phi(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n})$ je vedoucím členem polynomu $\Phi(h)$.

Zobrazení Φ je injektivní

Lemma 3. Homomorfismus Φ je injekce.

Důkaz. Ukážeme, že $\ker \Phi = \{0\}$, a to tak, že pro libovolný nenulový $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ dokážeme, že platí $\Phi(h) \neq 0$.

Pro každý člen $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ a každé nenulové $a \in R$ je $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}) = as_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_n^{r_n}$.

Vedoucí koeficient tohoto polynomu je a , jeho vedoucí člen je $x_1^{r_1+r_2+\dots+r_n} x_2^{r_2+r_3+\dots+r_n} \dots x_{n-1}^{r_{n-1}+r_n} x_n^{r_n}$.

Pro různé n -tice $[r_1, \dots, r_n]$ a $[k_1, \dots, k_n]$ tedy platí, že pro libovolné nenulové $a, b \in R$ jsou vedoucí členy polynomů $\Phi(ax_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n})$ a $\Phi(bx_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ různé.

Nechť $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ je ten člen polynomu h , jehož obraz v homomorfismu Φ má vedoucí člen před vedoucími členy obrazů ostatních členů. Pak vedoucí člen polynomu $\Phi(x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n})$ je vedoucím členem polynomu $\Phi(h)$. Je proto $\Phi(h) \neq 0$.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Protože důkaz lemmatu 2 je konstruktivní, dostáváme algoritmus na vyjadřování symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. Necht' R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Protože důkaz lemmatu 2 je konstruktivní, dostáváme algoritmus na vyjadřování symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů. Využijeme při něm i následující větu.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. *Nechť R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.*

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Protože důkaz lemmatu 2 je konstruktivní, dostáváme algoritmus na vyjadřování symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů. Využijeme při něm i následující větu.

Věta. *Každý symetrický polynom je součtem několika homogenních symetrických polynomů.*

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. *Nechť R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.*

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Protože důkaz lemmatu 2 je konstruktivní, dostáváme algoritmus na vyjadřování symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů. Využijeme při něm i následující větu.

Věta. *Každý symetrický polynom je součtem několika homogenních symetrických polynomů.*

Důkaz. Plyne z toho, že pro každou permutaci α stupeň členu $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ a členu $x_{\alpha(1)}^{t_1} x_{\alpha(2)}^{t_2} \dots x_{\alpha(n)}^{t_n}$ je stejný.

Hlavní věta o symetrických polynomech

Věta. *Nechť R je okruh a $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ je symetrický polynom n proměnných. Pak existuje právě jeden polynom $h \in R[x_1, \dots, x_n]$ splňující $\Phi(h) = f$, tj. $f = h(s_1, \dots, s_n)$.*

Důkaz. Plyne z lemmat 2 a 3.

Protože důkaz lemmatu 2 je konstruktivní, dostáváme algoritmus na vyjadřování symetrického polynomu pomocí elementárních symetrických polynomů. Využijeme při něm i následující větu.

Věta. *Každý symetrický polynom je součtem několika homogenních symetrických polynomů.*

Důkaz. Plyne z toho, že pro každou permutaci α stupeň členu $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$ a členu $x_{\alpha(1)}^{t_1} x_{\alpha(2)}^{t_2} \dots x_{\alpha(n)}^{t_n}$ je stejný. Proto součet členů daného symetrického polynomu pevně zvoleného stupně tvoří symetrický polynom.

Algorithmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Vypíšeme všechny n -tice $[k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$, které jsou lexikograficky menší než $[r_1, \dots, r_n]$ a které splňují

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = s$.

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Vypíšeme všechny n -tice $[k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$, které jsou

lexikograficky menší než $[r_1, \dots, r_n]$ a které splňují

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = s$.

Nechť a je vedoucí koeficient polynomu f .

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Vypíšeme všechny n -tice $[k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$, které jsou

lexikograficky menší než $[r_1, \dots, r_n]$ a které splňují

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = s$.

Nechť a je vedoucí koeficient polynomu f . Pak pro každou

vypsanou n -tici $[k_1, \dots, k_n]$ existuje $a_{[k_1, \dots, k_n]} \in R$ tak, že platí

$$f = as_1^{r_1-r_2} \dots s_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} s_n^{r_n} + \sum_{[k_1, \dots, k_n]} a_{[k_1, \dots, k_n]} s_1^{k_1-k_2} \dots s_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} s_n^{k_n}.$$

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Vypíšeme všechny n -tice $[k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$, které jsou

lexikograficky menší než $[r_1, \dots, r_n]$ a které splňují

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = s$.

Nechť a je vedoucí koeficient polynomu f . Pak pro každou

vypsanou n -tici $[k_1, \dots, k_n]$ existuje $a_{[k_1, \dots, k_n]} \in R$ tak, že platí

$$f = a s_1^{r_1 - r_2} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n} + \sum_{[k_1, \dots, k_n]} a_{[k_1, \dots, k_n]} s_1^{k_1 - k_2} \dots s_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} s_n^{k_n}.$$

Koeficienty $a_{[k_1, \dots, k_n]}$ určíme metodou neurčitých koeficientů: obě strany rovnosti jsou polynomy.

Algoritmus

Je dán nenulový symetrický polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$.

Lze předpokládat, že f je homogenní stupně $s = \text{st}(f)$

(jinak f napíšeme jako součet několika homogenních symetrických polynomů a každý sčítanec vyjadřujeme zvlášť).

Nechť $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ je vedoucí člen polynomu f .

Víme, že $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$.

Vypíšeme všechny n -tice $[k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}_0^n$, které jsou

lexikograficky menší než $[r_1, \dots, r_n]$ a které splňují

$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = s$.

Nechť a je vedoucí koeficient polynomu f . Pak pro každou

vypsanou n -tici $[k_1, \dots, k_n]$ existuje $a_{[k_1, \dots, k_n]} \in R$ tak, že platí

$$f = a s_1^{r_1 - r_2} \dots s_{n-1}^{r_{n-1} - r_n} s_n^{r_n} + \sum_{[k_1, \dots, k_n]} a_{[k_1, \dots, k_n]} s_1^{k_1 - k_2} \dots s_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} s_n^{k_n}.$$

Koeficienty $a_{[k_1, \dots, k_n]}$ určíme metodou neurčitých koeficientů: obě strany rovnosti jsou polynomy. Každým dosazením za proměnné dostaneme lineární rovnici pro neznámé koeficienty.