Masarykova univerzita • Přírodovědecká fakulta

Zuzana Došlá, Vítězslav Novák

NEKONEČNÉ ŘADY

Brno 2002

ISBN 80-210-1949-2

Kapitola 1

Nekonečné číselné řady – základní pojmy

Teorie nekonečných číselných řad vznikla ve druhé polovině 17. století spolu s utvářením infinitezimálního počtu. Mnohé myšlenky zrály řadu století, než se přiblížily dnešní podobě. V průběhu vývoje se někteří matematikové dopustili při počítání s řadami omylů, zejména v době, kdy nebyl pojem konvergence řady konstituován, a také v době, kdy panovala jakási hrůza z nekonečna. Tímto problémem se od počátku zabývali nejenom matematikové, ale i filozofové.

Například Zenon z Eleje (490–430 př.n.l.) považoval za nemožné, že by nekonečný součet kladných čísel mohl být konečné číslo; připomeňme jeho aporii[1] *Achilles a želva*: „Rychlonohý Achilles nikdy nedožene želvu, jestliže se želva nachází v nějaké vzdálenosti před ním.“ Se součty nekonečných geometrických řad již pracoval (aniž používal dnešní symboliku) Archimedes (287–212 př.n.l.), když určoval kvadraturu paraboly; první nekonečnou řadu, která nebyla geometrická, sečetl na základě fyzikálních úvah až ve středověku (kolem roku 1350) R. Swineshead.

V celé historii matematiky byla snaha zodpovědět dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

> *Jak sečíst nekonečnou (přesněji spočetnou) množinu čísel?*
>
> *Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?*

Odpověď na obě otázky ukážeme v průběhu prvních čtyř kapitol, které jsou věnovány nekonečným číselným řadám. Cílem první kapitoly je zavést pojem součet řady a ukázat některé základní operace s číselnými řadami.

[1] aporie — slepá ulička rozumu

1.1. Součet řady

Ze střední školy je dobře známa nekonečná geometrická řada. Postup použitý při určení jejího součtu, tj. utvoření tzv. částečných součtů a provedení limitního přechodu, je návodem pro obecnou definici.

Definice 1.1. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou*. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \dots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \dots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Nekonečná řada je tedy symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost. K tomuto symbolu je přiřazena posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$. Prvky posloupnosti $\{a_n\}$ nazýváme členy řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde a_n je n-tý člen. Číslo s_n nazýváme n-tým částečným součtem této řady.

V případě, kdy řada diverguje, rozlišujeme tři případy:
- ▹ Je-li $\lim s_n = \infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $+\infty$;
- ▹ Je-li $\lim s_n = -\infty$, říkáme, že řada určitě diverguje k $-\infty$;
- ▹ Jestliže $\lim s_n$ neexistuje, říkáme, že řada osciluje.

Má-li konvergentní řada $\sum a_n$ součet s, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je-li řada divergentní k $\pm\infty$, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, případně $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

Příklad 1.1. Vyšetřete, kdy konverguje nekonečná geometrická řada

$$a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad \text{kde } a \neq 0, q \neq 0,$$

a určete její součet.

Řešení. Postupujeme podle Definice 1.1: určíme s_n a provedeme limitní přechod.

a) Nechť $q = 1$. Pak $s_n = na$ a platí $\lim s_n = \lim na = \pm\infty$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a$ je divergentní.

b) Nechť $q = -1$. Řada má tvar $a + (-a) + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$, takže částečný součet je

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé } n, \\ a & \text{pro liché } n. \end{cases}$$

Posloupnost $\{0, a, 0, a, \dots\}$ nemá limitu, proto je tato řada oscilující.

c) Nechť $|q| \neq 1$. Platí $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$. Užitím vztahu

$$(1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = 1 - q^n$$

dostaneme

$$s_n = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Uvažujme následující případy:

pro $|q| < 1$ je $\lim q^n = 0$, proto $\lim s_n = \frac{a}{1-q}$;
pro $q > 1$ je $\lim q^n = \infty$, proto $\lim s_n = \pm\infty$;
pro $q < -1$ limita $\lim q^n$ neexistuje.

Proto je geometrická řada pro $|q| \geq 1$ divergentní a pro $|q| < 1$ konvergentní. V tomto případě je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Příklad 1.2. Určete součet řady:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

b) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

e) $\displaystyle\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots$

Řešení. Ve všech případech postupujeme podle Definice1.1: určíme n-tý částečný součet s_n dané řady a provedením limitního přechodu určíme její součet.

a) Výraz pro člen a_n rozložíme v součet parciálních zlomků $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pak

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,,$$

a proto

$$s = \lim s_n = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

b) Postupujeme obdobně: provedeme rozklad členu a_n v součet parciálních zlomků, tj.

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{A}{3n-2} + \frac{B}{3n+1}\,.$$

Z rovnice $1 = (3n-2)B + (3n+1)A$ plyne $B = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$, tj.

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Pak

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right), \end{aligned}$$

a proto

$$s = \lim s_n = \lim \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

c) Platí

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n},$$

odkud po vydělení dvěma plyne

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}\,.$$

Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$\frac{s_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}},$$

tj.

$$s_n = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right).$$

Jelikož

$$\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,\quad \lim\frac{n}{2^{n+1}}=0,$$

je součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim s_n=2.$$

Jiný způsob určení součtu této řady ukážeme v Příkladu 6.3 pomocí součtu mocninné řady. Z historického hlediska je tato řada první negeometrickou řadou, u které byl určen její součet. Určil ho středověký matematik Richard Swineshead v knize *Liber calculationum* napsané kolem roku 1350, když řešil tuto fyzikální úlohu: *Jaká je průměrná rychlost v hmotného bodu s počáteční rychlostí v_0 v časovém intervalu $t\in[0,1]$, který se pohybuje takto: během první poloviny časového intervalu konstantní rychlostí, během další čtvrtiny intervalu rychlostí, která je dvojnásobkem počáteční rychlosti, během následující osminy intervalu se pohybuje rychlostí, která je trojnásobkem počáteční rychlosti atd. až do nekonečna.*

Využijeme-li výše odvozený součet řady, dostaneme

$$v=\frac{s}{t}=s_1+s_2+\cdots=v_0.\frac{1}{2}+2v_0.\frac{1}{4}+\cdots=v_0\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\right)=2v_0\,,$$

tj. průměrná rychlost během celého časového intervalu se bude rovnat dvojnásobku počáteční rychlosti.

d) Platí

$$\begin{aligned}
a_1&=\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\\
a_2&=\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\\
a_3&=\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\\
&\vdots\\
a_{n-2}&=\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\\
a_{n-1}&=\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\\
a_n&=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}
\end{aligned}$$

Z uvedeného schématu je zřejmé, že $s_n=1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$, a proto

$$\begin{aligned}
s&=\lim_{n\to\infty}s_n=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=\\
&=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=1-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

e) Pro $|x| < 1$, $|y| < 1$ platí vztah

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Užitím tohoto vztahu postupně dostáváme

$$s_2 = a_1 + a_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{16}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{18}}{1 - \frac{2}{3.18}} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n = \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{1 - \frac{n-1}{2n^3}} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{n(2n^2 - 2n + 1)}{2n^3 - n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{n(2n^2 - 2n + 1)}{(2n^2 - 2n + 1)(n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

Součet řady je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 1.3. Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru číslo $0,2\overline{15}$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} 0,2\overline{15} &= \frac{2}{10} + \left(\frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \cdots\right) = \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \\ &= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{5} + \frac{15}{10 \cdot 99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{66} = \frac{71}{330}. \end{aligned}$$

Následující věta udává nutnou podmínku konvergence řady.

Věta 1.1. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Tedy $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, a protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, plyne odtud $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. □

Je třeba si uvědomit, že opak této věty neplatí. Je-li totiž pro řadu splněna podmínka $\lim a_n = 0$, pak z ní konvergence řady ještě neplyne. Tuto skutečnost ilustruje následující příklad.

Příklad 1.4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá *harmonická*. V této řadě je každý člen harmonickým průměrem dvou sousedních členů, tj. platí

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2} \,.$$

Řada splňuje nutnou podmínku konvergence, neboť $\lim \frac{1}{n} = 0$. Ukažme, že je tato řada divergentní. K tomuto účelu provedeme následující odhady:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\
s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2.\frac{1}{2}\\
s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{3}{2}\\
s_{16} &= s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} +\\
&\quad + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{4}{2}\\
&\vdots\\
s_{2^n} &> 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Posloupnost $\{s_n\}$ je rostoucí, proto má buď vlastní limitu nebo nevlastní limitu ∞. Tutéž limitu má i vybraná posloupnost $\{s_{2^n}\}$; avšak z nalezeného odhadu plyne $s_{2^n} \to \infty$, a proto také $\lim s_n = \infty$. Proto harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ určitě diverguje.

Jak ukážeme později, divergenci této řady lze dokázat velmi jednoduše pomocí integrálního kritéria.

Harmonická řada byla první řadou, u níž byla poprvé ukázána divergence řady. Učinil to právě uvedeným způsobem francouzský matematik Nicole Oresme (1323–1382).

Bezprostředně z Definice 1.1 plyne tato věta:

Věta 1.2. *Nechť $p \in N$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n .$$

Poznámka 1.1. Z předcházející věty plyne, že na konvergenci, resp. divergenci řady nemá vliv chování konečného počtu jejích členů. Proto budeme užívat tuto úmluvu:

▷ pokud nějaký předpoklad nemusí platit pro konečný počet členů, budeme říkat, že platí pro *skoro všechna n*, tj. platí až od jistého indexu počínaje;

▷ pokud budeme vyšetřovat konvergenci (divergenci) řady, budeme místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ psát jen $\sum a_n$.

Nutnou a postačující podmínkou konvergence řady je následující věta, kterou budeme používat v dalších důkazech; k praktickým výpočtům není příliš vhodná.

Lemma 1.1 (Cauchyovo-Bolzanovo kritérium konvergence). *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je cauchyovská, tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ a libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$|s_{n+m} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Plyne z Definice 1.1 a z úplnosti prostoru $\mathbb{R}$, což znamená, že každá posloupnost v $\mathbb{R}$ je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská (viz např. [3]). □

1.2. Operace s číselnými řadami

Zdrojem omylů mnoha matematiků byla skutečnost, že s nekonečnými součty nelze zacházet jako s konečnými součty. Uveďme příklad z historie: italský matematik Guido Grandi (1671–1742) uvažoval řadu

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n ;$$

dnes se tato řada nazývá *Grandiho řada*. Tato řada diverguje, protože $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1, \ldots$, tj. limita s_n neexistuje.

Danou řadu lze uzávorkovat dvojím způsobem a dostaneme tyto řady:

▷ řada $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots$ konverguje, neboť $s_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim s_n = 1$;

▷ řada $[1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \cdots$ konverguje, neboť $s_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $s = \lim s_n = 0$.

Jedná se o tři různé řady, kde první diverguje a druhé dvě konvergují, neboli uzávorkováním se porušila divergence řady.

Grandiho výpočet byl následující:

$$\begin{aligned}0 &= 0+0+0+0+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = \\ &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-0-\cdots = \\ &= 1,\end{aligned}$$

což si Grandi vyložil jako symbol stvoření světa bohem z ničeho. To vyvolalo bouřlivou polemiku, které se kromě Grandiho zúčastnil Leibniz, Nicolaus Bernoulli a jiní. V těchto diskusích se upřesňovaly pojmy součet nekonečné číselné řady, konvergence a divergence těchto řad. Grandi se dopustil dvou omylů: zkoumaná řada je divergentní, proto nemá konečný součet a kromě toho při svém výpočtu použil asociativní zákon, který obecně pro nekonečné řady neplatí.

Základní operací s nekonečnými řadami je součet dvou konvergentních řad:

Věta 1.3. *Buďte $\sum a_n, \sum b_n$ konvergentní řady a nechť $\sum a_n = s, \sum b_n = t$. Pak je konvergentní i řada $\sum(a_n + b_n)$ a platí $\sum(a_n + b_n) = s + t$.*

Důkaz. Označme $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_n$, $\{w_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum(a_n + b_n)$. Pak je $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$ a $w_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = s_n + t_n$. Odtud plyne $\lim w_n = \lim(s_n + t_n) = s + t$, tj. $\sum(a_n + b_n) = s + t$. □

Poznámka 1.2. Nechť $\sum a_n = s$, $\sum b_n = t$ jsou konvergentní řady a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna n. Pak $s \leq t$. Vskutku, pro posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$ a $\{t_n\}$ těchto řad platí $s_n \leq t_n$ pro všechna n, a proto i limita $s \leq t$.

Následující větu můžeme chápat jako analogii distributivního zákona pro konečné součty.

Věta 1.4. *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naopak, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$, kde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ konverguje, $\sum a_n = s$. Označíme-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum ka_n$, je $\lim s_n = s$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $t_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = ks_n$. Odtud plyne $\lim t_n = ks$, tj. $\sum ka_n = ks$.

Nechť naopak konverguje $\sum ka_n$ a $k \neq 0$. Podle již dokázané první části věty pak konverguje řada $\sum \frac{1}{k}(ka_n) = \sum a_n$. □

Poznámka 1.3. Tvrzení Věty 1.3 lze zřejmě úplnou indukcí rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců. Navíc lze podle Věty 1.4 nahradit součet uvažovaných řad jejich libovolnými lineárními kombinacemi.

Z konvergence řady $\sum(a_n + b_n)$ však naopak neplyne konvergence řad $\sum a_n$, $\sum b_n$, jak ukazuje příklad řad $\sum(-1)^{n-1}$, $\sum(-1)^n$.

Příklad 1.5. Dokažte konvergenci a najděte součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5.4^n - 3^{n+1}}{6^n}. \tag{1.2}$$

Řešení. Obě řady $\sum \frac{4^n}{6^n} = \sum(\frac{2}{3})^n$, $\sum \frac{3^n}{6^n} = \sum(\frac{1}{2})^n$ konvergují a jejich součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Podle Věty 1.3 a 1.4 je konvergentní i řada (1.2) a její součet je roven $s = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$.

Z příkladu Grandiho řady je zřejmé, že mezi členy nekonečné číselné řady nelze libovolně rozmístit závorky. Pouze v případě konvergentní řady můžeme sdružovat její členy, aniž se změní její součet. Tato skutečnost je zformulována v následující větě, která bývá nazývána asociativním zákonem pro konvergentní řady.

Věta 1.5. *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme $n_0 = 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz. Označíme-li $\{s_n\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$, $\{t_k\}$ posloupnost částečných součtů řady $\sum b_k$, pak platí $t_k = s_{n_k}$, takže posloupnost $\{t_k\}$ je vybrána z posloupnosti $\{s_n\}$. Podle věty o vybraných posloupnostech (viz např. [9]) posloupnost $\{t_k\}$ konverguje a platí $\lim t_k = \lim s_n$, tj. $\sum b_k = \sum a_n$. □

Poznámka 1.4. Asociativní zákon znamená zákon o sdružení — v řadě můžeme jednotlivé členy sdružovat (uzávorkovat), aniž se změní její součet. Tedy Větu 1.5 lze vyslovit takto: Konverguje-li řada $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, pak konverguje i řada $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} +$

$\cdots + a_{n_k}) + \cdots$ a má týž součet. Obrácené tvrzení však neplatí. Z konvergence řady $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots$ obecně neplyne konvergence řady $a_1 + a_2 + \cdots$, jak ukazuje úvodní příklad o Grandiho řadě.

Analogie třetího, komutativního zákona o záměně, resp. o přerovnávání členů řady, obecně pro konvergentní řady neplatí. Jak ukážeme v Kapitole 3, k jeho platnosti je třeba silnější vlastnost řady, tzv. absolutní konvergence.

Cvičení

1.1. Určete součet těchto řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+3)}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^{2n-1}} + \frac{2}{4^{2n}}\right)$

1.2. Vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru:

a) $-0,\overline{12}$ b) $0,53\overline{9}$

1.3. Rozhodněte, zda konvergují tyto řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

1.4. S využitím nekonečné geometrické řady řešte rovnice v $\mathbb{R}$:

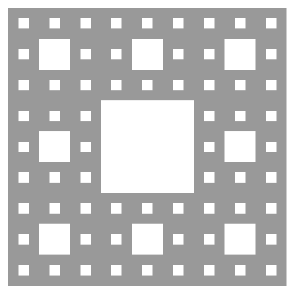
$$a)\quad \log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + \cdots = 2$$

$$b)\quad 1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \cdots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x}$$

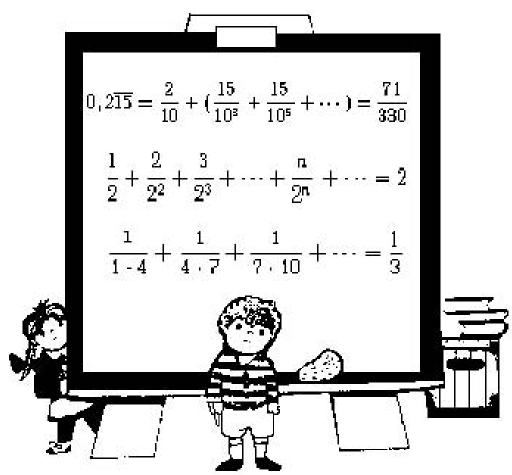
1.5. Do čtverce o délce strany 2 je vepsán čtverec, jehož strany jsou spojnicemi středů stran daného čtverce. Do vepsaného čtverce je stejným způsobem vepsán další čtverec atd. Vypočítejte součet obvodů a součet obsahů všech takovýchto čtverců.

1.6. Vypočtěte obsah obrazce utvořeného z nekonečně mnoha obdélníků, jestliže se délky jejich vodorovných stran zmenšují v poměru 4 : 1 a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru 1 : 2, přičemž obsah výchozího obdélníka je 48 cm^2. (Tuto úlohu řešil N. Oresme ve svém traktátu *O konfiguraci kvalit,* kde naznačil konstrukce útvarů, které mají nekonečné rozměry, ale konečný obsah).

1.7. Určete obsah následujícího obrazce (tzv. *Sierpińského koberec*): Jednotkový čtverec rozdělíme na devět shodných čtverců a odstraníme vnitřek prostředního čtverce. Každý ze zbývajících čtverců rozdělíme znovu na devět shodných čtverečků a znovu odstraníme v každém z nich jeho střední čtvereček. Po třetím kroku takové operace dostaneme útvar zobrazený na obrázku. Když tuto operaci prodloužíme do nekonečna, dostaneme útvar, který se nazývá Sierpińského koberec.



1.8. Dokažte: Jestliže $\sum a_n$ konverguje, $\sum b_n$ určitě diverguje k $+\infty$, pak $\sum(a_n + b_n)$ určitě diverguje k $+\infty$. Jestliže $\sum a_n$ konverguje, $\sum b_n$ osciluje, pak $\sum(a_n+b_n)$ osciluje.



Špetka praxe vydá za tunu teorie.

Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1. a) 1 b) $\frac{11}{18}$ c) $\frac{23}{90}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 3 g) 5 h) $\frac{14}{15}$ **1.2.** a) $-\frac{4}{33}$ b) $\frac{27}{50}$ **1.3.** a)–c) divergují **1.4.** a) $x = 10$ b) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. **1.5.** Součet obvodů je $8(2 + \sqrt{2})$, součet obsahů je 8. **1.6.** Úloha vede k určení součtu nekonečné geometrické řady: $48 + 24 + 12 + 6 + \cdots$, jejíž součet je $s = 96$ cm^2. **1.7.** Obsah Sierpińského koberce je $P = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^{n+1}} = 0$.

Kapitola 2

2.1. a) konverguje b) konverguje c) konverguje d) diverguje e) konverguje pro $0 < a < 1$, diverguje pro $a \geq 1$ f) diverguje g) konverguje pro $a > 1$, diverguje pro $a \in (0, 1]$ h) konverguje i) konverguje j) konverguje k) konverguje l) diverguje m) konverguje n) diverguje o) diverguje pro $a \geq \frac{\pi}{2}$, konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$ p) diverguje q) diverguje. **2.2.** $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{3^{2n}}$. **2.3.** Neexistuje [Návod: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak existuje $\{n_k\}$, $n_k \to \infty$ tak, že $\lim \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Označíme-li $b_k = a_{n_k}$, je řada $\sum b_k$ divergentní. Protože $a_n \geq 0$, je divergentní i řada $\sum a_n$. **2.4.** viz [5].

Kapitola 3

3.1. a) konverguje b) konverguje c) diverguje d) diverguje e) konverguje f) konverguje. **3.2.** a) konverguje neabsolutně b) konverguje absolutně c) konverguje neabsolutně d) diverguje e) konverguje absolutně f) konverguje absolutně g) konverguje absolutně h) konverguje neabsolutně. **3.3.** a) Pro $x > 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \leq 0$ řada diverguje. b) Pro $x \in (\frac{1}{e}, e)$ řada konverguje absolutně, pro ostatní x řada diverguje. c) Pro $|x| < 2$ řada konverguje absolutně, pro $|x| > 2$ a $x = 2$ diverguje, pro $x = -2$ konverguje neabsolutně. d) Pro $x \geq 0$ řada konverguje absolutně, pro $x < 0$ řada diverguje.