

4. cvičení – řešení

1 Binomické rozdělení, $X \sim \text{Bi}(n=10, \theta=\frac{1}{2})$

$$P(X=5) = p(5) = \binom{10}{5} \frac{1}{2}^5 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-5} = 0,246$$

$$P(X \leq 5) = F(5) = 0,623$$

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = 0,172$$

$$P(X \in \{1, 3, \dots, 9\}) = p(1) + p(3) + \dots + p(9) = 0,5$$

2 Analógie 1. příkladu, $n=20, \theta=\frac{1}{6}$

$$P(X=5) = 0,129$$

$$P(X \leq 5) = P(X \leq 4) = F(4) = 0,769$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 0,102$$

$$P(X \in \{1, 3, \dots, 19\}) = 0,5$$

3 Geometrické rozdělení, $X \sim \text{Ge}(\theta = \frac{2}{5} = 0,4)$.

Úspěch = konec hry = prav. vytáhnutí lichého čísla na kartě = $\frac{2}{5}$.

$$P(X \leq 10) = F(10) = 0,996$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 0,130$$

$$P(5 \leq X \leq 8) = P(4 < X \leq 8) = F(8) - F(4) = 0,068$$

4 Poissonovo rozdělení, $X \sim \text{Po}(\lambda)$

λ = průměrný počet událostí za sledované období,
zde $\lambda=4$, neboť 4 úřadky za 4 týdny.

$$P(X=0) = p(0) = 0,018$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = 0,629$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - p(0) = 0,982$$

$$P(2 \leq X \leq 6) = P(1 < X \leq 6) = F(6) - F(1) = 0,798$$

5 Rovnoměrné spojité rozdělení, $X \sim R(0, 10)$.

(Hustota psti: $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10} & , 0 \leq x < 10 \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$$

$$P(X=2) = 0$$

$$P(X \leq 5) = \int_0^5 f(x) dx = \frac{1}{10} \int_0^5 dx = \frac{1}{10} [x]_0^5 = \frac{1}{2} = F(5)$$

$$P(X \geq 2) = \int_2^{10} f(x) dx = \frac{1}{10} \int_2^{10} dx = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 1 - F(2)$$

$$P(3 \leq X \leq 8) = \int_3^8 f(x) dx = \frac{1}{10} \int_3^8 dx = \frac{1}{2} = F(8) - F(3)$$

6 Exponenciální rozdělení, $X \sim Ex(\lambda)$,

λ = průměrný počet událostí za jednotku času, zde $\lambda = 4$,

pro ~~jednotky = sekund~~
údaje v minutách!

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X < \cancel{0,25}) = \int_0^{0,25} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \int_0^{0,25} 4 \cdot e^{-4x} dx = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot [e^{-4x}]_0^{0,25} =$$
$$= (-1) \cdot (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} + 1 \doteq 0,632 = F(0,25)$$

$$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = \int_{0,5}^{1,5} 4 \cdot e^{-4x} dx = (-1) \cdot (e^{-6} - e^{-2}) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^6} \doteq 0,133$$
$$= F(1,5) - F(0,5)$$

7 Normální rozdělení psti, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 40$, $\sigma = 4$.

$$P(X \leq 50) = F(50) = \Phi\left(\frac{50-40}{4}\right) \doteq 0,994$$

$$P(X > 35) = 1 - F(35) = 1 - \Phi\left(\frac{35-40}{4}\right) \doteq 0,894$$

$$P(35 < X < 45) = F(45) - F(35) = \Phi\left(\frac{45-40}{4}\right) - \Phi\left(\frac{35-40}{4}\right) \doteq 0,789$$

$$P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\sigma) = 0,95 = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96)$$