

# Cvičení MV011 Statistika I

## 5. Náhodná veličina a rozdělení pravděpodobnosti

Monika Kroupová, Ondřej Pokora, Petra Ráboňová

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2017



## Příklad 1

Řidič dodávkového auta projíždí 4 křižovatkami řízenými nezávislými semaforey. Na každé křižovatce je řidič nucen zastavit s pravděpodobností 0,5. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  popisující počet křižovatek, které řidič projede, než bude nucen poprvé zastavit. Spočítejte:

- (A) distribuční funkci  $F(x)$ ; (B)  $P(X \leq 2)$ ; (C)  $P(X = 3)$ ; (D)  $P(1 \leq X \leq 3)$ ; (E)  $P(X = 3,5)$ ; (F)  $P(X \leq 3,5)$ .

## Příklad 2

Tramvaje odjíždí ze zastávky v pravidelném intervalu 10 minut. Přicházející cestující právě vidí odjíždět tramvaj a přizpůsobí svoji rychlost, aby na zastávku přišel určitě dříve než přijede následující tramvaj. Náhodná veličina  $X$  popisuje dobu čekání na zastávce a má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{x}{50}, & 0 \leq x < 10 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}.$$

- (A) Nakreslete graf hustoty  $f(x)$ ; (B) spočítejte distribuční funkci  $F(x)$ ; (C) spočítejte  $P(X \leq 5)$ ; (D) spočítejte  $P(X \geq 2)$ ; (E) spočítejte  $P(3 \leq X \leq 8)$ .

### Příklad 3

Náhodný vektor  $(X, Y)$  reprezentuje se stejnou pravděpodobností volbu jednoho ze tří bodů v rovině o souřadnicích:  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  a  $(1, 0)$ . Jsou souřadnice  $X, Y$  stochasticky nezávislé náhodné veličiny? Určete simultánní rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru  $X, Y$  a simultánní distribuční funkci  $F(x, y)$ , obě marginální rozdělení pravděpodobnosti a jejich distribuční funkce  $F_X(x), F_Y(y)$ .

### Příklad 4

V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 nekvalitní. Mezi 8 kvalitními je 5 výrobků I. jakosti a 3 výrobky II. jakosti. V obchodě zakoupíme 2 náhodně vybrané výrobky z uvedené zásilky. Označíme  $X$  = počet zakoupených kvalitních výrobků a  $Y$  = počet zakoupených výrobků I. jakosti.

Určete simultánní rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru  $(X, Y)$  a obě marginální rozdělení pravděpodobnosti. Jsou náhodné veličiny  $X, Y$  stochasticky nezávislé? Dále spočítejte:

(A)  $F(1,1)$ ; (B)  $F(2,1)$ ; (C)  $F_X(x)$ ; (D)  $F_Y(y)$ ; (E)  $P(X \geq 1)$ .

### Příklad 5

Nad hlavní diagonálou čtverce  $[0, 10] \times [0, 10]$  zvolíme zcela náhodně bod  $(X, Y)$ . Určete simultánní a obě marginální rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru  $(X, Y)$ . Jsou náhodné veličiny  $X, Y$  stochasticky nezávislé? Dále spočítejte pravděpodobnost  $P(X \geq 4)$ .

### Příklad 6

Doby provozuschopnosti 2 akumulátorů  $X$  a  $Y$  jsou popsány stochasticky nezávislými náhodnými veličinami  $X$  a  $Y$  s exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti a průměrnými životnostmi 1 rok pro  $X$  a 2 roky pro  $Y$ .

- (A) Určete simultánní rozdělení pravděpodobnosti vektoru  $(X, Y)$ ;
- (B) spočítejte pravděpodobnost, že akumulátor  $X$  bude fungovat alespoň 2 roky;
- (C) pravděpodobnost, že oba akumulátory budou fungovat alespoň 2 roky;
- (D) pravděpodobnost, že právě jeden z akumulátorů bude fungovat alespoň 2 roky;
- (E) pravděpodobnost, že alespoň jeden akumulátor bude fungovat alespoň 2 roky.

## Výsledky

1. (B)  $7/8$ ; (C)  $1/16$ ; (D)  $7/16$ ; (E)  $0$ ; (F)  $15/16$
2. (C)  $3/4$ ; (D)  $0,64$ ; (E)  $0,45$
3. veličiny nejsou nezávislé
4. (A)  $17/45$ ; (B)  $35/45$ ; (E)  $44/45$
5.  $f(x,y) = \frac{1}{50}$ ,  $f_X(x) = \frac{10-x}{50}$ ,  $f_Y(y) = \frac{y}{50}$ , veličiny nejsou nezávislé;  $0,36$
6. (A)  $f(x,y) = \frac{1}{2}e^{-x-y/2}$ ; (B)  $e^{-2} = 0,135$ ; (C)  $e^{-3} = 0,05$ ;  
(D)  $e^{-1} + e^{-2} - 2e^{-3} = 0,404$ ; (E)  $e^{-1} + e^{-2} - e^{-3} = 0,45$