Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 10. 11. 2003

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 25 bodů. Pro řešení požijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ne** $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \emptyset$ *množina $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$ má prvek $(\emptyset, \emptyset)$ a je tudíž neprázdná.*

(b) **ne** $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$ *množina $\{\{\emptyset\}\}$ má dvě podmnožiny: prázdnou a sebe samu.*

(c) **ne** $\{\emptyset\} \cap \emptyset = \{\emptyset\} \cup \emptyset$ $\{\emptyset\} \cap \emptyset = \emptyset \neq \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cup \emptyset$

(d) **ano** $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** nebo **ne**, jestliže daná relace ρ na množině $\mathbb{Z}$ splňuje příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff a > b + 1$	*ne*	*ne*	*ano*
$a \ \rho \ b \iff \|a \cdot b\| \leq 4$	*ne*	*ano*	*ne*
$a \ \rho \ b \iff a > 2 \wedge \ b < 2$	*ne*	*ne*	*ano*
$a \ \rho \ b \iff 2a \mid b$	*ne*	*ne*	*ano*
$a \ \rho \ b \iff a \cdot b \neq 0$	*ne*	*ano*	*ano*
$a \ \rho \ b \iff a \neq b \ \wedge \ a^2 = b^2$	*ne*	*ano*	*ne*

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\{a, \emptyset\} \times \{\{\emptyset\}, a\}$ a vypište je.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množině a.)
Pokud $a = \emptyset$ pak má daná množina 2 různé prvky a to: $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \{\emptyset\})$.
Pokud $a = \{\emptyset\}$ pak má daná množina 2 prvky a to: $(\emptyset, \{\emptyset\})$, $(\{\emptyset\}, \{\emptyset\})$.
Jinak má daná množina 4 prvky a to: $(\emptyset, \{\emptyset\})$, $(a, \{\emptyset\})$, $(\emptyset, a)$, (a, a).

4. (4 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C, D platí:

(a) $A \cap B \subseteq D \iff A \cap (B - D) = \emptyset$;
„$\Longrightarrow$“ Sporem. Nechť $a \in A \cap (B - D)$. Pak $a \in A$, $a \in B$ a $a \notin D$. Odtud $a \in A \cap B$, $a \notin D$, což je spor s předpokladem $A \cap B \subseteq D$.
„$\Longleftarrow$“ Sporem. Nechť existuje a takové, že $a \in A \cap B$, ale $a \notin D$. Pak $a \in A$ a zároveň $a \in B - D$ a tedy i $a \in A \cap (B - D) = \emptyset$, což je spor.

(b) $C \subseteq A, \ D \subseteq B \implies (A \cup D) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \cup D$.
Je třeba ukázat dvě inkluze. Označme $L = (A \cup D) \cap (B \cup C)$ a $P = (A \cap B) \cup C \cup D$.
„$L \subseteq P$“ Nechť $x \in L$. Pak $x \in A \cup D$ a zároveň $x \in B \cup C$. Pokud $x \in D$ nebo $x \in C$ pak i $x \in P$. Zbývá možnost, že $x \notin D \ \wedge \ x \notin C$. Potom ale $x \in A$ a zároveň $x \in B$ a tudíž $x \in A \cap B \subseteq P$.
„$P \subseteq L$“ Nechť $x \in P$. Pak jsou tři možnosti: buď $x \in A \cap B$ nebo $x \in C$ nebo $x \in D$.
1) Pokud $x \in A \cap B$, pak $x \in A \subseteq A \cup D$ a $x \in B \subseteq B \cup C$ a dostáváme $x \in L$.
2) Pokud $x \in C$, pak vzhledem k předpokladu $C \subseteq A$ máme i $x \in A \cup D$ a máme $x \in L$.
3) Pokud $x \in D$, pak analogicky z $D \subseteq B$ dostaneme $x \in B \cup C$ a tedy i $x \in L$.
`Jiné řešení`: *Z předpokladů máme $A \cap C = C$, $B \cap D = D$. Označme $L = (A \cup D) \cap (B \cup C)$. Z distributivity pak dostáváme $L = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$. Použitím předchozích rovností a rovnosti $C \cup D \cup (D \cap C) = C \cup D$ dostaneme $L = (A \cap B) \cup C \cup D \cup (D \cap C) = (A \cap B) \cup C \cup D = P$.*

5. (3 body) Rozhodněte, zda pro libovolné dvě množiny A, B platí rovnost:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

(Buď rovnost dokažte, nebo udejte příklad dvou množin A, B pro které rovnost neplatí.)
Rovnost neplatí. Stačí položit $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, *kde* $a \neq b$. *Pak* $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ *ale* $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. *Poznamenejme, že rovnost neplatí pro žádnou dvojici neporovnatelných množin, tj. množin takových, že* $A - B \neq \emptyset \neq B - A$.

6. (3 body) Nechť A je neprázdná konečná množina. Dokažte, že zobrazení $f : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ dané předpisem $f(a) = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}$ je injektivní.
Nechť $x, y \in A$ *takové, že* $f(x) = f(y)$. *Protože* $\{x\} \in f(x)$ *máme i* $\{x\} \in f(y)$. *Dle definice zobrazení* f *odtud dostáváme* $y \in \{x\}$. *Proto* $x = y$. *Zobrazení je tedy injektivní.*

Zdůvodněte, že f není bijekce.
Nechť A *je* n*-prvková množina. Pak počet prvků množiny* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *je roven* 2^{2^n}. *Protože pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $n \neq 2^{2^n}$, *neexistuje žádná bijekce z množiny* A *do množiny* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, *zejména tedy* f *není bijekcí.*
Jinak si lze povšimnout, že $f(a) \neq \emptyset$, *neboť* $\{a\} \in f(a)$. *Zobrazení* f *tedy není surjektivní, protože prvek* $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *nemá vzor.*

7. (5 bodů) Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte:
(Relace i zobrazení zadávejte výčtem prvků z množiny $A \times A$.)

(a) zobrazení $f, g : A \to A$ taková, že $f \circ g \neq g \circ f$;
např: $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}, g = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$; *zde* $f \circ g \neq f$, $g \circ f = g$

(b) injektivní zobrazení $f : A \to A$, které není reflexivní relací;
např: $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$

(c) reflexivní relaci R na množině A, která není zobrazením;
např: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$

(d) zobrazení $f : A \to A$, které je symetrickou relací a pro něž $f \circ f \neq f$;
např: $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$

(e) dvojici relací $R \subseteq S$ na množině A takových, že $R \neq S$, R je zobrazení a S je tranzitivní relace.
např: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, S = R \cup \{(1, 2)\}$.