Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 10. 11. 2003

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 25 bodů. Pro řešení požijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou $-1/2$, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ne** $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ *prvkem množiny* $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$ *je* $(\emptyset, \emptyset) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\} = \{\{\emptyset\}\} \neq \emptyset$

(b) **ano** $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$ $\emptyset \in \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$

(c) **ne** $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \emptyset$ $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \neq \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset$

(d) **ano** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$ $\{\emptyset\} = \{\emptyset\} - \emptyset$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou $-1/3$, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** nebo **ne**, jestliže daná relace ρ na množině $\mathbb{Z}$ splňuje příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff a < b + 1$	*ano*	*ne*	*ano*
$a\ \rho\ b \iff a \leq 4 \ \wedge\ b \geq 7$	*ne*	*ne*	*ano*
$a\ \rho\ b \iff a \mid 2b$	*ano*	*ne*	*ne*
$a\ \rho\ b \iff a \neq b \ \wedge\ a + b = 0$	*ne*	*ano*	*ne*
$a\ \rho\ b \iff \lvert a \cdot b \rvert \geq 4$	*ne*	*ano*	*ne*
$a\ \rho\ b \iff a \cdot b > 0$	*ne*	*ano*	*ano*

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\{a, \emptyset, \{\emptyset\}\} \times \{a\}$ a vypište je.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množině a.)
Pokud $a = \emptyset$ *pak má daná množina* 2 *různé prvky a to:* $(\emptyset, \emptyset)$, $(\{\emptyset\}, \emptyset)$.
Pokud $a = \{\emptyset\}$ *pak má daná množina* 2 *prvky a to:* $(\emptyset, \{\emptyset\})$, $(\{\emptyset\}, \{\emptyset\})$.
Jinak má daná množina 3 *prvky a to:* $(\emptyset, a)$, $(\{\emptyset\}, a)$, (a, a).

4. (4 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C, D platí:

(a) $A \cap (C - D) = \emptyset \iff A \cap C \subseteq D$;
„$\Longrightarrow$“ Sporem. Nechť existuje a takové, že $a \in A \cap C$, *ale* $a \notin D$. *Pak* $a \in A$ *a zároveň* $a \in C - D$ *a tedy i* $a \in A \cap (C - D) = \emptyset$, *což je spor.*
„$\Longleftarrow$“ Sporem. Nechť $a \in A \cap (C - D)$. *Pak* $a \in A$, $a \in C$ *a* $a \notin D$. *Odtud* $a \in A \cap C$, $a \notin D$, *což je spor s předpokladem* $A \cap C \subseteq D$.

(b) $A \subseteq B,\ C \subseteq D \implies (A \cup D) \cap (B \cup C) = A \cup C \cup (B \cap D)$.
Je třeba ukázat dvě inkluze. Označme $L = (A \cup D) \cap (B \cup C)$ *a* $P = A \cup C \cup (B \cap D)$.
„$L \subseteq P$“ Nechť $x \in L$. *Pak* $x \in A \cup D$ *a zároveň* $x \in B \cup C$. *Pokud* $x \in A$ *nebo* $x \in C$ *pak i* $x \in P$. *Zbývá možnost, že* $x \notin A \wedge x \notin C$. *Potom ale* $x \in D$ *a zároveň* $x \in B$ *a tudíž* $x \in B \cap D \subseteq P$.
„$P \subseteq L$“ Nechť $x \in P$. *Pak jsou tři možnosti: buď* $x \in A$ *nebo* $x \in C$ *nebo* $x \in B \cap D$.
1) Pokud $x \in A$, *pak vzhledem k předpokladu* $A \subseteq B$ *máme i* $x \in B \cup C$ *a máme* $x \in L$.
2) Pokud $x \in C$, *pak analogicky z* $C \subseteq D$ *dostaneme* $x \in A \cup D$ *a tedy i* $x \in L$.
3) Pokud $x \in B \cap D$, *pak* $x \in B \subseteq B \cup C$ *a* $x \in D \subseteq A \cup D$ *a dostáváme* $x \in L$.
`Jiné řešení`: *Z předpokladů máme* $A \cap B = A$, $D \cap C = C$. *Označme* $L = (A \cup D) \cap (B \cup C)$. *Z distributivity pak dostáváme* $L = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$. *Použitím předchozích rovností a rovnosti* $A \cup C \cup (A \cap C) = A \cup C$ *dostaneme* $L = A \cup (A \cap C) \cup (D \cap B) \cup C = A \cup C \cup (B \cap D) = P$.

5. (3 body) Rozhodněte, zda pro libovolné dvě množiny A, B platí rovnost:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

(Buď rovnost dokažte, nebo udejte příklad dvou množin A, B pro které rovnost neplatí.) *Rovnost platí. Pro libovolnou množinu X totiž platí následující ekvivalence: $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \iff X \subseteq A \cap B \iff (X \subseteq A \wedge X \subseteq B) \iff (X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)) \iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.*

6. (3 body) Nechť A je neprázdná konečná množina. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \to \mathcal{P}(A)$ dané předpisem $f(X) = \bigcup X$ je surjektivní.
Nechť $Y \in \mathcal{P}(A)$ pak $f(\{Y\}) = \bigcup\{Y\} = Y$. Pro libovolné $Y \in \mathcal{P}(A)$ máme tedy vzor $\{Y\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Zdůvodněte, že f není bijekce.
Nechť A je n-prvková množina. Pak počet prvků množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ je roven 2^{2^n} a počet prvků množiny $\mathcal{P}(A)$ je 2^n. Proto neexistuje žádná bijekce z množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ do množiny $\mathcal{P}(A)$ a tedy ani f není bijekcí.
Lze i přímo ukázat, že f není injektivní. Pro $a \in A$ platí $f(\{\emptyset, \{a\}\}) = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$, ale také $f(\{\{a\}\}) = \{a\}$.

7. (5 bodů) Buď $A = \{1, 2, 3\}$. Nalezněte:
(Relace i zobrazení zadávejte výčtem prvků z množiny $A \times A$.)

(a) zobrazení $f : A \to A$ takové, že $f, f \circ f$ a $f \circ f \circ f$ jsou různá zobrazení;
např: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

(b) surjektivní zobrazení na $f : A \to A$, které není reflexivní relací;
např: $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

(c) reflexivní relaci R na množině A, která není zobrazením;
např: $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\}$

(d) zobrazení $f : A \to A$, které je tranzitivní relací;
např: $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(e) dvojici relací $R \subseteq S$ na množině A takových, že $R \neq S$, R je zobrazení a S je symetrická relace.
např: $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3)\}, S = R \cup \{(1, 2)\}$.