Základy matematiky — podzim 2005 — **Vzor**

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Jádro homomorfismu grup $f : G \to H$ je podgrupa grupy G.

(b) **ano** — **ne** Jádro zobrazení $f : A \to B$ je relace ekvivalence na množině B.

(c) **ano** — **ne** Každé izotonní zobrazení uspořádaných množin je injektivní.

(d) **ano** — **ne** Existuje bijekce z množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\mathbb{N}$.

(e) **ano** — **ne** Existuje relace na množině A, která je symetrická i antisymetrická.

(f) **ano** — **ne** Každá lineárně uspořádaná množina je úplný svaz.

(g) **ano** — **ne** Pro libovolnou množinu X je $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ okruh.

2. (7 bodů) Definujte uspořádanou dvojici a kartézký součin dvou množin.

3. (3krát 2 body) Určete počet všech

(a) sudých šesticiferných přirozených čísel vytvořených z cifer $1, 2, 3, 4, 5, 6$, v nichž se žádná cifra neopakuje;

(b) sudých šesticiferných přirozených čísel vytvořených z cifer $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, v nichž se cifry mohou opakovat;

(c) sudých čtyřciferných přirozených čísel, v nichž se žádná cifra neopakuje.

4. (5krát 2 body) Udejte příklad

(a) uspořádáné čtyřprvkové množiny, které nemá ani nejmenší ani největší prvek;

(b) relace ekvivalence na ctyřprvkové množině, které je zároveň uspořádáním;

(c) tříprvkové grupy;

(d) množiny X, takové, že množina $\mathcal{P}(X)$ má čtyři prvky;

(e) systému množin $\mathcal{A}$ takového, že $\bigcup \mathcal{A} = \mathbb{N}$ a $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$.

5. (10 bodů) Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$, kde $\circ$ je operace definovaná vztahem $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + b)$, je grupa. Odpověď zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť A je n-prvková množina. Určete počet všech bijekcí z množiny A do A, takových, že podmnožina $\{k \in A \mid f(k) = k\}$ má $n - 3$ prvků.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ je definována relace ρ vztahem $x \rho y \iff 4 | (x^2 - y^2)$. Dokažte, že ρ je ekvialence na $\mathbb{N}$ a popište rozklad $\mathbb{N} \backslash \rho$. Kolik má rozklad prvků.

8. (10 bodů) Označme P množinu všech konečných podmnožin množiny reálných čísel. (Zde prázdná množina je konečná, tj. $\emptyset \in P$.) Je uspořádaná množina $(P, \subseteq)$ úplný svaz? Nechť zobrazení $f : P \to \mathbb{N}_0$ přiřazuje množině $A \in P$ počet jejich prvků, tj. $f(A) = |A|$. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : (P, \subseteq) \to (\mathbb{N}_0, \leq)$ izotonní. Zachovává zobrazení f konečná suprema? (Tj. platí pro $A, B \in P$ rovnost $f(sup\{A, B\}) = sup\{f(A), f(B)\}$?)

9. (10 bodů) Nechť A je neprázdná konečná množina. Pro libovolnou relaci ρ na množině A (tj. $\rho \in \mathcal{P}(A \times A)$) značíme množinu vzorů resp. obrazů takto:

$$\mathrm{Dom}(\rho) = \{a \in A \mid \exists b \in A : a \rho b\}, \quad \mathrm{Im}(\rho) = \{b \in A \mid \exists a \in A : a \rho b\}.$$

Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A)$ dané předpisem $f(\rho) = \mathrm{Dom}(\rho) \cup \mathrm{Im}(\rho)$ je surjektivní. Rozhodněte, pro které množiny A je zobrazení f bijekce.

Komentář

Úloha 1. je testová.

Úloha 2. je teoretická. Zadání by mohlo vypadat například i takto: Zkonstruujte přirozená čísla. *Nebo:* Definujte pojmy relace ekvivalence a rozklad množiny. Zformulujte větu popisující jejich vztah. *Nebo:* Definujte pojmy okruh a těleso. *A podobně ...*

Úloha 3. sestává z jednoduchých příkladů z kombinatoriky — hodnotí se pouze výsledek.

Úloha 4. hodnotí se pouze zda příklad vyhovuje požadavkům.

Úloha 5. je z algebry — dokázat či vyvrátit, že něco je grupa, okruh,...či homomorfismus. Další příklad zadaní: Rozhodněte zda zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dané předpisem $f(a) = a + ai$ je homomorfismus z okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Úloha 6. je z kombinatoriky, v které se objevují probírané pojmy — spočítat kolik je zobrazení, relací, ... daných vlastností.

Úloha 7. se týká rozkladů — dokázat, že daná relace je ekvivalence a popsat jí příslušný rozklad.

Úloha 8. se týká uspořádání a úplných svazů.

Úloha 9. je globálního charakteru. Používá více probraných pojmů.

V úlohách 5 - 9 se očekává dostatečné zdůvodnění odpovědí.

Řešení

1) (a) ano, (b) ne — je to ekvivalence na množině A, (c) ne — každé konstantní zobrazení je izotonní, (d) ne — Věta 2.6., (e) ano — např. $\emptyset$ nebo id_A, (f) ne — např $(\mathbb{N}, \leq)$, (g) ne — pro X neprázdnou není $(\mathcal{P}(X), \cup)$ grupa (neutrální prvek je $\emptyset$, ale k X neexistuje inverze).

2) Jsou-li a a b množiny, je uspořádaná dvojice definována takto: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Pro dvě množiny A a B je kartézký součin množina $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

3) (a) $3 \cdot 5! = 360$, (b) $6 \cdot 7^4 \cdot 4$, (c) $9 \cdot 8 \cdot 7$ dělitelné 10 $+4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7$ nedělitelné $10 = 41 \cdot 56$. Jiným způsobem: spočtěme nejdříve všechny dvojice (první,poslední). Je $5 \cdot 9 = 45$ dvojic různých číslic, z nichž druhé je sudé; přičemž z nich 4 jsou pro nás nepřípustné (první je 0). Tzn. 41. Vyčerpali jsme dvě cifry, takže je $8 \cdot 7 = 56$ dvojciferných čísel, které lze „nacpat“ mezi 41 přípustných dvojic.

4) Např.: (a) $(\{1, 2, 3, 4\}, =)$, (b) ad a, tj. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, (c) $(\mathbb{Z}_3, +)$, (d) $X = \{1, 2\}$, (e) např. $\mathcal{A} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nebo $\mathcal{A} = \{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}\}$.

5) Grupa to není. Operace je asociativní, neutrální prvek je $(1, 0)$, ale inverze neexistuje ke všem prvkům — např. k prvku $(0, 0)$, neboť pro libovolná $a, b \in \mathbb{Z}$ platí $(0, 0) \circ (a, b) = (0, 0) \neq (1, 0)$.

6) Hledaný počet je $2 \cdot \binom{n}{3}$. Existuje $\binom{n}{n-3} = \binom{n}{3}$ podmnožin množiny A o $n - 3$ prvcích a pro každou z nich máme dvě možnosti jak zobrazit zbývající 3 prvky, aby se nezobrazovali na sebe. (Pro prvky a, b, c jsou to zobrazení $a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a$ a zobrazení $a \mapsto c, c \mapsto b, b \mapsto a$.)

7) Relace ρ je reflexivní neboť $4 \mid 0$, symetrická neboť $4 \mid k \implies 4 \mid -k$ a tranzitivní neboť $4 \mid k,\ 4 \mid n \implies 4 \mid k + n$ a tedy pro $x, y, z \in \mathbb{Z}$ platí $4|(x^2 - y^2), 4|(y^2 - z^2) \implies 4|(x^2 - z^2)$. Rozklad $\mathbb{N}\backslash\rho$ má dvě třídy: lichá a sudá čísla. Tj. $\mathbb{N}\backslash\rho = \{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}\}$. Skutečně $x\rho y \iff 2 \mid x - y$, neboť $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ a $x - y$ a $x + y$ mají stejnou paritu.

8) $(P, \subseteq)$ není úplný svaz, protože P nemá největší prvek. (Poznamenejme, že v P existují libovolná neprázdná infima.) Zobrazeníf je izotonní. Jsou-li $A \subseteq B$ konečné množiny reálných čísel, pak B má aspoň tolik prvků jako A, tj. $A \subseteq B \implies |A| = f(A) \leq f(B) = |B|$. Zobrazení suprema nezachovává. Stačí vzít např. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Pak $sup\{A, B\} = A \cup B = \{1, 2\}$ a tedy $f(sup\{A, B\}) = 2$ avšak $sup\{f(A), f(B)\} = sup\{1, 1\} = 1$.

9) Nechť $B \subseteq A$ je libovolná podmnožina množiny A. Pak pro $\rho = \mathrm{id}_B = \{(a, a) \in A \times A \mid a \in B\}$ platí $\mathrm{Dom}(\rho) = B$, $\mathrm{Im}(\rho) = B$. Tedy $f(\rho) = B$ a zobrazení f je surjektivní. Protože A je končná množina, pak f je bijekce (vzhledem k tomu, že f je surjekce) právě tehdy, když mají množiny $\mathcal{P}(A \times A)$ a $\mathcal{P}(A)$ stejný počet prvků. Pokud A je n-prvková, pak $\mathcal{P}(A \times A)$ má 2^{n^2} prvků a $\mathcal{P}(A)$ má 2^n prvků. Bijekce je to tedy pro $n = 1$, tedy pro A jednoprvkové.