Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **Ž**, 31. 10. 2007, 16h

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} - \{\emptyset\} = \emptyset - \emptyset$,

(b) **ano** — **ne** $A \cap \{A\} = A$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ano** — **ne** existuje dvojice množin A, B takových, že $A \times B = B \times A$,

(d) **ano** — **ne** $A \subseteq \mathcal{P}(A)$ pro libovolnou množinu A.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff a^2 - b^2 \in \mathbb{Z}$			
$a\ \rho\ b \iff ab \notin \mathbb{Z}$			
$a\ \rho\ b \iff (\exists x \in \mathbb{Z})(a = bx)$			
$a\ \rho\ b \iff a^2 < b^2$			
$a\ \rho\ b \iff a^2 \neq b \vee a^2 = b^2$			

3. (2 body) Nalezněte dvouprvkovou množinu A, pro niž má množina $\mathcal{P}(A) \cap A$ dva prvky.

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí

$$C \subseteq A \cup B \implies (A - B) \cup (B - C) = (A \cup B \cup C) - (B \cap C).$$

5. (4 body) Buď $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| \geq |b|\}$ relace na množině $\mathbb{Z}$.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) relaci f na množině $\mathbb{Z}$, která je surjektivní zobrazení, není injektivní, a pro niž $f \subseteq R$;

(b) relaci T na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $R \circ T$ je zobrazení;

(c) relaci S na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $R \subseteq S$, a která je zároveň symetrická, reflexivní a tranzitivní;

(d) relaci U na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $U \subseteq R$, a pro niž $U \circ U \neq U$.

6. (3 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{X_i \mid i \in I\}$ a $\{Y_i \mid i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{i\in I}(X_i - Y_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i - \bigcup_{i\in I} Y_i.$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{i\in I}(X_i - Y_i) \supseteq \bigcap_{i\in I} X_i - \bigcup_{i\in I} Y_i.$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{A_i \mid i \in I\}$ a $\{B_i \mid i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$\prod_{i\in I}(A_i \times B_i) \cong (\prod_{i\in I} A_i) \times (\prod_{i\in I} B_i).$$

Odpověď zdůvodněte!