Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **Z**, 31. 10. 2007, 12h

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\emptyset - \{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$,

(b) **ano** — **ne** $A \subseteq A - \{\emptyset\}$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ano** — **ne** $\mathcal{P}(\emptyset) \times \emptyset = \emptyset \times \emptyset$,

(d) **ano** — **ne** $\mathcal{P}(\emptyset) \in \mathcal{P}(A)$ pro libovolnou množinu A.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech záporných celých čísel $\mathbb{Z}^-$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 2a \mid b+1$			
$a \ \rho \ b \iff ab \geq 10$			
$a \ \rho \ b \iff (\exists k, l \in \mathbb{N})(a^k = b^l)$			
$a \ \rho \ b \iff a^2 \leq b^2 \leq 5a^2$			
$a \ \rho \ b \iff (a+b)^2 < a+b$			

3. (2 body) Určete, pro které množiny A má množina $A \times \{\{\emptyset\}, A\}$ právě 1 prvek.

Určete, pro které množiny A má množina $A \times \{\{\emptyset\}, A\}$ právě 2 prvky.

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí

$$A \cap B \cap C = \emptyset \implies (A - B) - (A - C) = A \cap C.$$

5. (4 body) Buď $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid\ 2|(a - b)\ \}$ relace na množině $\mathbb{N}$.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) relaci f na množině $\mathbb{N}$, která je surjektivní zobrazení a pro niž $f \cap R = \emptyset$;

(b) tranzitivní relaci T na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $T \subseteq R$ a $R \neq T$;

(c) relaci S na množině $\mathbb{N}$, která je zobrazení a pro niž $R \circ S \neq S \circ R$;

(d) relaci U na množině $\mathbb{N}$, která není reflexivní a pro niž $U \circ U = R$.

6. (3 body) Nechť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je dána množina A_n. Definujme dále pro $i \in \mathbb{N}$ množiny

$$B_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}, j \geq i} A_j \quad \text{a} \quad C_i = \bigcap_{j \in \mathbb{N}, j \geq i} A_j.$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i.$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{A_i \mid i \in I\}$ a $\{B_i \mid i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$(\prod_{i \in I} A_i) \cap (\prod_{i \in I} B_i) \subseteq \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

Rozhodněte, zda platí

$$(\prod_{i \in I} A_i) \cap (\prod_{i \in I} B_i) \supseteq \prod_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

Odpovědi zdůvodněte!