Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 6. 11. 2006

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ne** $\{\emptyset\} \subseteq A \cup B$ pro libovolné množiny A, B,

(b) **ne** $A \subseteq A \times \emptyset$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ano** $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset\})$,

(d) **ne** $\{\emptyset^\emptyset\} = \{\emptyset\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných celých čísel $\mathbb{N}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
1. $a \ \rho \ b \iff 2 \mid a+b \wedge 3 \mid b$	Ne	Ne	Ano
2. $a \ \rho \ b \iff 7 < a^b$	Ne	Ne	Ne
3. $a \ \rho \ b \iff 4 \leq a \leq b$	Ne	Ne	Ano
4. $a \ \rho \ b \iff 3 \mid a \wedge 3 \nmid b$	Ne	Ne	Ano
5. $a \ \rho \ b \iff (a-b)^2 < (a+b)^2$	Ano	Ano	Ano

1. R: $(1,1) \notin \rho$; *S:* $(1,3) \in \rho$, $(3,1) \notin \rho$; *T:* $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies 2 \mid a+b, b+c \wedge 3 \mid c \implies 2 \mid a+2b+c \wedge 3 \mid c \implies 2 \mid a+c \wedge 3 \mid c \implies (a,c) \in \rho$.
2. R: $(1,1) \notin \rho$; *S:* $(8,1) \in \rho$, $(1,8) \notin \rho$; *T:* $(2,10) \in \rho, (10,1) \in \rho, (2,1) \notin \rho$.
3. R: $(1,1) \notin \rho$; *S:* $(4,5) \in \rho$, $(5,4) \notin \rho$; *T:* $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies 4 \leq a \leq b \leq c \implies (a,c) \in \rho$.
4. R: $(1,1) \notin \rho$; *S:* $(3,1) \in \rho$, $(1,3) \notin \rho$; *T:Neexistuje* $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho$ *protože* $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies 3 \nmid b \wedge 3 \mid b$. *Tzn. implikace platí.*
5. $\rho = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) - \mathcal{P}(\{a,b\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na prvcích a, b, c.)

Pokud $c \in \{a,b\}$ *pak množina* $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) - \mathcal{P}(\{a,b\})$ *je prázdná.*
Pokud $c \notin \{a,b\}$ *a* $a = b$ *pak má* 2 *prvky.*
Pokud $c \notin \{a,b\}$ *a* $a \neq b$ *pak má* 4 *prvky.*
Příklad nelze řešit tak, že napíšeme $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) - \mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ *a počítáme prvky množiny* $\{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$. *Taková rovnost totiž obecně neplatí, záleží jaké jsou prvky* a,b,c.

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$((A-B)-C) \cap D = ((D-C)-B) \cap A.$$

$x \in ((A-B)-C) \cap D \iff$
$x \in (A-B)-C \wedge x \in D \iff$
$x \in (A-B) \wedge x \notin C \wedge x \in D \iff$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \wedge x \in D \iff$
$x \in D - C \wedge x \notin B \wedge x \in A \iff$
$x \in (D-C) - B \wedge x \in A \iff$
$x \in ((D-C)-B) \cap A$

5. (4 body) Buď $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení dané předpisem $g(n) = n^2$, tj. $g = \{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nalezněte:
(Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) relaci f na množině $\mathbb{N}$, která je zobrazení a pro niž $f \subseteq f \circ f$;
Např. $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$*, nebo např. konstantní zobrazení.*

(b) zobrazení $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$;
Např. h *dané předpisem* $h(n) = [\sqrt{n}]$*, nebo např.* h *definované takto:* $h(n^2) = n$ *a* $h(k) = 1$ *pro* k *takové, že* $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.

(c) tranzitivní relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq g$;
Např. $R = \emptyset$*, nebo např.* $R = \{(1,1)\}$*, nebo např.* $R = \{(n, n^2) \mid$ *pro* n *takové, že* $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}\}$.

(d) symetrickou a reflexivní relaci S na množině $\mathbb{N}$, která není tranzitivní a pro niž $g \subseteq S$.
Např. $S = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \cup g \cup g^{-1}$*, nebo např.* $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{(2,16),(16,2)\}$.

6. (2 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{A_i | i \in I\}$ a $\{B_i | i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

Neplatí. Např. pro libovolné dvě různé neprázdné množiny K, L *dostaneme při volbě* $I = \{1,2\}$, $A_1 = B_2 = K$ *a* $A_2 = B_1 = L$ *následující rovnosti* $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = K \cup L$ *a* $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) = K \cap L$*. A inkluze* $K \cup L \subseteq K \cap L$ *evidentně neplatí.*

Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) \supseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i).$$

Platí.
$x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \implies$
$(\exists i \in I)(x \in A_i \cap B_i) \implies$
$(\exists i \in I)(x \in A_i) \wedge (\exists i \in I)(x \in B_i) \implies$
$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \wedge x \in \bigcup_{i \in I} B_i \implies$
$x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i)$.

7. (3 body) Nechť A, B jsou neprázdné konečné množiny a definujme zobrazení $\alpha : A^B \times B^A \to A^A$ předpisem $\alpha((f,g)) = f \circ g$.
Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení α injektivní. (Odpověď zdůvodněte.)

Zobrazení α *je injektivní právě tehdy, když* B *je jednoprvková množina.*
Nechť $B = \{b\}$*, pak existuje jediné zobrazení z množiny* A *do množiny* B *(zobrazující všechny prvky množiny* A *na prvek* b*), označme jej* k_b*. Pak z* $\alpha((f, k_b)) = \alpha((f', k_b))$ *plyne* $(f \circ k_b)(a) = (f' \circ k_b)(a)$ *pro libovolné* $a \in A$*. Odtud* $f(b) = f'(b)$ *tzn.* $f = f'$ *neboť* f *i* f' *jsou zobrazení z množiny* B*. Ukázali jsme, že* $\alpha((f, k_b)) = \alpha((f', k_b))$ *implikuje* $(f, k_b)) = (f', k_b)$*, tj.* α *je injektivní.*
Nechť nyní B *obsahuje alespoň dva různé prvky, řekněme* b, c*. Dále nechť* $a \in A$*. Označme nyní* $f : B \to A$ *konstantní zobrazení na prvek* a*;* $g_b : A \to B$ *konstantní zobrazení na prvek* b*; a* $g_c : A \to B$ *konstantní zobrazení na prvek* c*. Pak* $(f, g_b) \neq (f, g_c)$ *přičemž* $\alpha((f, g_b)) = f \circ g_b = f \circ g_c = \alpha((f, g_c))$*. Tzn.* α *není injektivní.*

Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení α surjektivní. (Odpověď zdůvodněte.)

Zobrazení α *je surjektivní právě tehdy, když existuje injektivní zobrazení* $h : A \to B$*, tj.* A *má nejvýše tolik prvků jako* B*. (Připomeňme, že* A, B *jsou konečné, neprázdné.)*
Důkaz:
„$\implies$“ *Pokud* α *je surjektivní, pak existuje* $(f, g) \in A^B \times B^A$ *tak, že* $\alpha((f, g)) = f \circ g = \mathrm{id}_A$*. Z této rovnosti plyne, že* g *je injektivní.*
„$\impliedby$“ *Nechť naopak existuje injektivní zobrazení* $h : A \to B$*. Snadno nahlédneme, že potom existuje zobrazení* $h' : B \to A$ *takové, že* $h' \circ h = \mathrm{id}_A$*. Buď nyní* $k : A \to A$ *libovolné zobrazení. Pak* $\alpha((h', h \circ k)) = h' \circ h \circ k = \mathrm{id}_A \circ k = k$.