Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 6. 11. 2006

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \subseteq A \cap B$ pro libovolné množiny A, B,

(b) **ano** — **ne** $\emptyset \times A \subseteq A$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ano** — **ne** $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \subseteq \{\emptyset\}$,

(d) **ano** — **ne** $\{\emptyset^{\emptyset}, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných celých čísel $\mathbb{N}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 2 \mid a \wedge 3 \mid a + b$			
$a \ \rho \ b \iff 10 < a^b$			
$a \ \rho \ b \iff a \leq b \leq 3$			
$a \ \rho \ b \iff 2 \mid a \wedge 2 \mid b + 1$			
$a \ \rho \ b \iff (a-b)^2 \leq (a+b)^2$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{a, b\}) - \mathcal{P}(\{c\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na prvcích a, b, c.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D).$$

5. (4 body) Buď $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zobrazení dané předpisem $g(n) = [\frac{n}{2}]$, kde $[x]$ značí celou část čísla x, tj. $g = \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(2n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) relaci f na množině $\mathbb{N}_0$, která je zobrazení a pro niž $f \circ f \subseteq f$;

(b) zobrazení $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$;

(c) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}_0$ takovou, že $R \subseteq g$;

(d) tranzitivní a reflexivní relaci S na množině $\mathbb{N}_0$, která není symetrická a pro niž $g \subseteq S$.

6. (2 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{A_i|i \in I\}$ a $\{B_i|i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i).$$

Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \supseteq \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i).$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (3 body) Nechť A, B jsou neprázdné konečné množiny a definujme zobrazení $\beta : A^B \times B^A \to B^B$ předpisem $\beta((g, f)) = f \circ g$.
Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení β injektivní. (Odpověď zdůvodněte.)

Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení β surjektivní. (Odpověď zdůvodněte.)