Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 6. 11. 2006

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ne** $\{\emptyset\} \subseteq A \cap B$ pro libovolné množiny A, B,

(b) **ano** $\emptyset \times A \subseteq A$ pro libovolnou množinu A,

(c) **ne** $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \subseteq \{\emptyset\}$,

(d) **ne** $\{\emptyset^\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných celých čísel $\mathbb{N}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff 2 \mid a \wedge 3 \mid a+b$	Ne	Ne	Ne
$a\ \rho\ b \iff 10 < a^b$	Ne	Ne	Ne
$a\ \rho\ b \iff a \le b \le 3$	Ne	Ne	Ano
$a\ \rho\ b \iff 2 \mid a \wedge 2 \mid b+1$	Ne	Ne	Ano
$a\ \rho\ b \iff (a-b)^2 \le (a+b)^2$	Ano	Ano	Ano

1. R: $(1,1) \notin \rho$; S: $(2,1) \in \rho$, $(1,2) \notin \rho$; T: $(2,4) \in \rho, (4,2) \in \rho, (2,2) \notin \rho$.
2. R: $(1,1) \notin \rho$; S: $(11,1) \in \rho$, $(1,11) \notin \rho$; T: $(2,11) \in \rho, (11,1) \in \rho, (2,1) \notin \rho$.
3. R: $(4,4) \notin \rho$; S: $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \notin \rho$; T: $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies a \le b \le c \le 3 \implies (a,c) \in \rho$.
4. R: $(1,1) \notin \rho$; S: $(2,1) \in \rho$, $(1,2) \notin \rho$; T:Neexistuje $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho$ protože $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies 2 \nmid b \wedge 2 \mid b$. Tzn. implikace platí.
5. $\rho = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{a,b\}) - \mathcal{P}(\{c\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na prvcích a, b, c.)

Pokud $c \in \{a,b\}$ a $a = b$ (tj. $\{a,b\} = \{c\}$) pak množina $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) - \mathcal{P}(\{a,b\})$ je prázdná.
Pokud $c \in \{a,b\}$ a $a \neq b$ pak má 2 prvky.
Pokud $c \notin \{a,b\}$ a $a = b$ pak má 1 prvek.
Pokud $c \notin \{a,b\}$ a $a \neq b$ pak má 3 prvky.
Příklad nelze řešit tak, že napíšeme $\mathcal{P}(\{a,b\}) - \mathcal{P}(\{c\}) = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ a počítáme prvky množiny $\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Taková rovnost totiž obecně neplatí, záleží jaké jsou prvky a, b, c.

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D).$$

$x \in (A-B) \cap (C-D) \iff$
$x \in (A-B) \wedge x \in (C-D) \iff$
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \wedge x \notin D \iff$
$x \in A \cap C \wedge x \notin B \cup D \iff$
$x \in (A \cap C) - (B \cup D)$.

5. (4 body) Buď $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zobrazení dané předpisem $g(n) = [\frac{n}{2}]$, kde $[x]$ značí celou část čísla x, tj. $g = \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{(2n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) relaci f na množině $\mathbb{N}_0$, která je zobrazení a pro niž $f \circ f \subseteq f$;
Např. $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$, nebo např. konstantní zobrazení.

(b) zobrazení $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takové, že $g \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$;
Např. h dané předpisem $h(n) = 2n$.

(c) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}_0$ takovou, že $R \subseteq g$;
Např. $R = \emptyset$, nebo např. $R = \{(0,0)\}$.

(d) tranzitivní a reflexivní relaci S na množině $\mathbb{N}_0$, která není symetrická a pro niž $g \subseteq S$.
Např. $S = \{(a,b) \mid a \geq b\}$.

V původním nepřesném zadání na písemce bylo vše uvažováno na množině $\mathbb{N}$. To se projeví pouze u řešení části c), kde $R = \{(0,0)\}$ není řešením. Jinak zde uvedené předpisy vyhovují i tomuto zadání. Nepřesnost takového zadání spočívá v tom, že g není zobrazení, protože není definováno $g(1)$. Nicméně otázky zůstávají smysluplné.

6. (2 body) Nechť je dána neprázdná množina I a systémy množin $\{A_i | i \in I\}$ a $\{B_i | i \in I\}$. Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i).$$

Platí.
$x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \implies$
$x \in (\bigcap_{i\in I} A_i) \vee x \in (\bigcap_{i\in I} B_i) \implies$
$(\forall i \in I)(x \in A_i) \vee (\forall i \in I)(x \in B_i) \implies$
$(\forall i \in I)(x \in A_i \cup B_i) \implies$
$x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$.

Rozhodněte, zda platí

$$(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) \supseteq \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B_i).$$

Neplatí. Např. pro libovolné dvě různé neprázdné množiny K, L dostaneme při volbě $I = \{1,2\}$, $A_1 = B_2 = K$ a $A_2 = B_1 = L$ následující rovnosti $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = K \cap L$ a $\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i) = K \cup L$. A inkluze $K \cap L \supseteq K \cup L$ evidentně neplatí.

7. (3 body) Nechť A, B jsou neprázdné množiny a definujme zobrazení $\beta : A^B \times B^A \to B^B$ předpisem $\beta((g,f)) = f \circ g$.
Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení β injektivní. (Odpověď zdůvodněte.)

Zobrazení β je injektivní právě tehdy, když A je jednoprvková množina.
Nechť $A = \{a\}$, pak existuje jediné zobrazení z množiny B do množiny A (zobrazující všechny prvky množiny B na prvek a), označme jej k_a. Pak z $\beta((k_a, g)) = \beta((k_a, g'))$ plyne $(g \circ k_a)(b) = (g' \circ k_a)(b)$ pro libovolné $b \in B$. Odtud $g(a) = g'(a)$ tzn. $g = g'$ neboť g i g' jsou zobrazení z množiny $A = \{a\}$.
Ukázali jsme, že $\beta((k_a, g)) = \beta((k_a, g'))$ implikuje $(k_a, g) = (k_a, g')$, tj. β je injektivní.
Nechť nyní A obsahuje alespoň dva různé prvky, řekněme a, c. Dále nechť $b \in B$. Označme nyní $g_a : B \to A$ konstantní zobrazení na prvek a; $g_c : B \to A$ konstantní zobrazení na prvek c; $f : A \to B$ konstantní zobrazení na prvek b. Pak $(g_a, f) \neq (g_c, f)$ přičemž $\beta((g_a, f)) = f \circ g_a = f \circ g_c = \beta((g_c, f))$. Tzn. β není injektivní.

Rozhodněte, pro které dvojice množin A, B je zobrazení β surjektivní. (Odpověď zdůvodněte.)

Zobrazení β je surjektivní právě tehdy, když existuje injektivní zobrazení $h : B \to A$, tj. B má nejvýše tolik prvků jako A. (Připomeňme, že A, B jsou konečné, neprázdné.)
Důkaz:
„$\implies$“ Pokud β je surjektivní, pak existuje $(g, f) \in A^B \times B^A$ tak, že $\beta((g,f)) = f \circ g = \mathrm{id}_B$. Z této rovnosti plyne, že g je injektivní.
„$\impliedby$“ Nechť naopak existuje injektivní zobrazení $h : B \to A$. Snadno nahlédneme, že potom existuje zobrazení $h' : A \to B$ takové, že $h' \circ h = \mathrm{id}_B$. Buď nyní $k : B \to B$ libovolné zobrazení. Pak $\beta((h, k \circ h')) = k \circ h' \circ h = k \circ \mathrm{id}_B = k$.