Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 15. 11. 2004

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení							

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 25 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano — ne** $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(b) **ano — ne** $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$

(c) **ano — ne** $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\emptyset\}$

(d) **ano — ne** $\emptyset^{\emptyset} = \emptyset$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff a^b = 1$			
$a\ \rho\ b \iff a^2 - b^2 = 1$			
$a\ \rho\ b \iff a - b \in \mathbb{Z}$			
$a\ \rho\ b \iff a + b \in \mathbb{Q}$			
$a\ \rho\ b \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$			
$a\ \rho\ b \iff a < 1 < b$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{\emptyset, A\}) \cup \mathcal{P}(\{\emptyset, B\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí: $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.

5. (2 body) Nechť je dána množina A, neprázdná množina I a systém množin $\{A_i | i \in I\}$. Dokažte, že potom

$$A \div \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (A \div A_i).$$

6. (3 body) Nechť A je množina. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A)$ dané předpisem $f(R) = \{a \in A \mid (\exists b \in A)((a, b) \in R \vee (b, a) \in R)\}$ je surjektivní.

Rozhodněte, pro které množiny A je zobrazení f bijekce.

7. (3 body) Nechť I je neprázdná konečná množina. Rozhodněte, pro které systémy množin $\{A_i | i \in I\}$ platí rovnost:

$$\prod_{i\in I} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i)^I.$$

8. (5 bodů) Buď $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení dané předpisem $s(n) = n + 1$, tj. $s = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dále definujme relaci $R_<$ na množině $\mathbb{N}$ takto $R_< = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$.
Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq R_<$;

(b) tranzitivní relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $s \subseteq R$;

(c) relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R_< \subseteq R$ a zároveň $R \circ R \neq R$;

(d) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $f \circ s \neq s \circ f$;

(e) relaci R na množině $\mathbb{N}$, která není zobrazení, ale $R \circ R$ zobrazení je.