Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 15. 11. 2004

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení							

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** $\emptyset \cup \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ — $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

(b) **ano** $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$ — $\emptyset \in \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

(c) **ne** $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\emptyset\}$ — $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(d) **ne** $\emptyset^\emptyset = \emptyset$ — $\emptyset^\emptyset = \{f : \emptyset \to \emptyset\} = \{\emptyset\}$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
i) $a\ \rho\ b \iff a^b = 1$	ne	ne	ano
ii) $a\ \rho\ b \iff a^2 - b^2 = 1$	ne	ne	ne
iii) $a\ \rho\ b \iff a - b \in \mathbb{Z}$	ano	ano	ano
iv) $a\ \rho\ b \iff a + b \in \mathbb{Q}$	ne	ano	ne
v) $a\ \rho\ b \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$	ano	ne	ano
vi) $a\ \rho\ b \iff a < 1 < b$	ne	ne	ano

Komentář (nebyl požadován): i) $\rho = \{(1,b) \mid b \in \mathbb{R}^+\}$, *R:* $(2,2) \notin \rho$, *S:* $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \notin \rho$, *T:* $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \implies a = 1 \implies (a,c) \in \rho$; *ii) R:* $(1,1) \notin \rho$, *S:* $(\sqrt{2},1) \in \rho$, $(1,\sqrt{2}) \notin \rho$, *T:* $(\sqrt{3},\sqrt{2}) \in \rho$, $(\sqrt{2},1) \in \rho$, $(\sqrt{3},1) \notin \rho$; *iii) R:* $(a,a) \in \rho$ *neboť* $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$, *S:* $(a,b) \in \rho \implies a - b \in \mathbb{Z} \implies b - a \in \mathbb{Z} \implies (b,a) \in \rho$, *T:* $(a,b),(b,c) \in \rho \implies a-b, b-c \in \mathbb{Z} \implies a - c = (a-b)+(b-c) \in \mathbb{Z} \implies (a,c) \in \rho$; *iv) R:* $(\sqrt{2},\sqrt{2}) \notin \rho$, *S:* $(a,b) \in \rho \implies a + b \in \mathbb{Q} \implies b + a \in \mathbb{Q} \implies (b,a) \in \rho$, *T:* $(\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}) \in \rho$, $(2-\sqrt{2},\sqrt{2}) \in \rho$, $(\sqrt{2},\sqrt{2}) \notin \rho$; *v) R:* $(a,a) \in \rho$ *neboť* $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Z}$, *S:* $(3,1) \in \rho$, $(1,3) \notin \rho$, *T:* $(a,b),(b,c) \in \rho \implies \frac{a}{b}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Z} \implies \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{Z} \implies (a,c) \in \rho$; *vi) R:* $(2,2) \notin \rho$, *S:* $(\frac{1}{2},2) \in \rho$, $(2,\frac{1}{2}) \notin \rho$, *T:* $(a,b),(b,c) \in \rho \implies a < 1, 1 < c \implies (a,c) \in \rho$.

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{\emptyset, A\}) \cup \mathcal{P}(\{\emptyset, B\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)
Řešení: Množina má 6 *prvků pokud jsou* A *a* B *navzájem různé neprázdné množiny. Má* 2 *prvky pokud* $A = B = \emptyset$. *V ostatních případech má* 4 *prvky (tj. v případech* $A = B \neq \emptyset$, $A \neq B = \emptyset$, $B \neq A = \emptyset$*).*

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí: $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$.
Důkaz: $x \in (A-B) \cap (A-C) \iff (x \in A - B \wedge x \in A - C) \iff (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \iff (x \in A \wedge x \notin B \cup C) \iff x \in A - (B \cup C)$.

5. (2 body) Nechť je dána množina A, neprázdná množina I a systém množin $\{A_i | i \in I\}$. Dokažte, že potom

$$A \div \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} (A \div A_i).$$

Důkaz: Nechť $x \in A \div \bigcup_{i \in I} A_i$. *Pak jsou dvě možnosti: buď* $x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ *nebo naopak* $x \notin A \wedge x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. *Pro každou zvlášť ukážeme, že* $x \in \bigcup_{i \in I} (A \div A_i)$.

Pokud $x \in A \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$ pak pro libovolné $i \in I$ máme $x \notin A_i$, tj. $x \in A \div A_i$ pro všechna $i \in I$, tudíž $x \in \bigcup_{i\in I}(A \div A_i)$.
Nechť nyní $x \notin A \wedge x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Potom existuje index $i \in I$ takový, že $x \in A_i$ a proto $x \in A \div A_i$ pro tento index. Odtud $x \in \bigcup_{i\in I}(A \div A_i)$.

6. (3 body) Nechť A je množina. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A)$ dané předpisem $f(R) = \{a \in A \mid (\exists b \in A)((a,b) \in R \vee (b,a) \in R)\}$ je surjektivní.
Důkaz: Buď $B \subseteq A$ libovolný prvek $\mathcal{P}(A)$. Položme $R = B \times B$. Nyní R je prvkem $\mathcal{P}(A \times A)$ a snadno se nahlédne, že $f(R) = B$, neboť pro libovolný prvek $b \in B$ máme $(b,b) \in R$, tj $b \in f(R)$.
Rozhodněte, pro které množiny A je zobrazení f bijekce.
Řešení: Pro A prázdnou nebo jednoprvkovou.
V obou případech mají množiny $\mathcal{P}(A \times A)$ i $\mathcal{P}(A)$ stejný počet prvků a tudíž každé surjektivní zobrazení mezi nimi je bijekcí.
Pokud množina A obsahuje alespoň dva různé prvky, řekněme a, b, pak snadno nahlédneme, že $f(\{(a,a),(b,b)\}) = \{a,b\} = f(\{(a,b)\})$, tj. f není injektivní.

7. (3 body) Nechť I je neprázdná konečná množina. Rozhodněte, pro které systémy množin $\{A_i | i \in I\}$ platí rovnost:

$$\prod_{i\in I} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i)^I.$$

Řešení: Podle definice je $\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(j) \in A_j$ pro libovolné $j \in I\}$. Inkluze $\prod_{i\in I} A_i \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)^I$ je tedy splněna vždy. Otázka zní, kdy nastane rovnost, tj. kdy je podmínka $(\forall j \in I)(f(j) \in A_j)$ splněna pro libovolné zobrazení $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$. Odtud vidíme, že musí platit $A_j = \bigcup_{i\in I} A_i$ pro libovolný index $j \in I$. Tedy $A_i = A_j$ pro všechna $i, j \in I$.
Odpověď: Rovnost platí právě pro jednoprvkové množiny $\{A_i | i \in I\}$. (Pozor, to neznamená, že I je jednoprvková.)

8. (5 bodů) Buď $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení dané předpisem $s(n) = n + 1$, tj. $s = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dále definujme relaci $R_<$ na množině $\mathbb{N}$ takto $R_< = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$.
Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq R_<$;
Např: $R = \emptyset$.

(b) tranzitivní relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $s \subseteq R$;
Např: $R = R_<$ nebo $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nebo $R_\leq = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$. Pozn: nestačí vzít $s \cup s^2 = s \cup \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$, neboť to není tranzitivní relace. Nejmenší relace (vzhledem k inkluzi) s požadovanou vlastností je relace $R_<$.

(c) relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R_< \subseteq R$ a zároveň $R \circ R \neq R$;
Např: $R = R_<$ nebo $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \neq b\}$. Pozn: nikoli $R_\leq = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$, neboť $R_\leq \circ R_\leq = R_\leq$.

(d) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že $f \circ s \neq s \circ f$;
Např: zobrazení dané předpisem $f(n) = 1$ nebo zobrazení dané předpisem $f(n) = 2n$. Pozn: nikoli relace s^{-1}, která není zobrazením (1 nic nepřiřazuje).

(e) relaci R na množině $\mathbb{N}$, která není zobrazení, ale $R \circ R$ zobrazení je.
Např: $R = \{(n,1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,3)\}$.