Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 15. 11. 2004

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení							

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** $\emptyset \cup \{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\qquad \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

(b) **ne** $(\{\emptyset\}, \emptyset) \in \{\emptyset\} \times \emptyset$ $\qquad \{\emptyset\} \times \emptyset = \emptyset$

(c) **ano** $\mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \cap \{\emptyset\}$ $\qquad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(d) **ano** $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$ $\qquad \emptyset^\emptyset = \{f : \emptyset \to \emptyset\} = \{\emptyset\}$

2. (6 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
i) $a\ \rho\ b \iff a^b = 2$	ne	ne	ne
ii) $a\ \rho\ b \iff a^2 + b^2 = 1$	ne	ano	ne
iii) $a\ \rho\ b \iff a - b \in \mathbb{N}_0$	ano	ne	ano
iv) $a\ \rho\ b \iff a + b \notin \mathbb{Q}$	ne	ano	ne
v) $a\ \rho\ b \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$	ano	ano	ano
vi) $a\ \rho\ b \iff a \leq 1 \leq b$	ne	ne	ano

Komentář (nebyl požadován): i) R: $(2,2) \notin \rho$, *S:* $(2,1) \in \rho$, $(1,2) \notin \rho$, *T:* $(\sqrt{2}, 2) \in \rho$, $(2,1) \in \rho$, $(\sqrt{2}, 1) \notin \rho$; *ii) R:* $(1,1) \notin \rho$, *S:* $(a,b) \in \rho \implies a^2 + b^2 = 1 \implies b^2 + a^2 = 1 \implies (b,a) \in \rho$, *T:* $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \rho$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) \in \rho$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \notin \rho$; *iii) R:* $(a,a) \in \rho$ *neboť* $a - a = 0 \in \mathbb{N}_0$, *S:* $(2,1) \in \rho$, $(1,2) \notin \rho$, *T:* $(a,b), (b,c) \in \rho \implies a - b, b - c \in \mathbb{N}_0 \implies a - c = (a-b) + (b-c) \in \mathbb{N}_0 \implies (a,c) \in \rho$; *iv) R:* $(1,1) \notin \rho$, *S:* $(a,b) \in \rho \implies a + b \notin \mathbb{Q} \implies b + a \notin \mathbb{Q} \implies (b,a) \in \rho$, *T:* $(1, \sqrt{2}) \in \rho$, $(\sqrt{2}, 1) \in \rho$, $(1,1) \notin \rho$; *v) R:* $(a,a) \in \rho$ *neboť* $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Q}$, *S:* $(a,b) \in \rho \implies \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a, b \in \mathbb{R}^+ \implies \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \implies (b,a) \in \rho$, *T:* $(a,b), (b,c) \in \rho \implies \frac{a}{b}, \frac{b}{c} \in \mathbb{Q} \implies \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{Q} \implies (a,c) \in \rho$; *vi) R:* $(2,2) \notin \rho$, *S:* $(1,2) \in \rho$, $(2,1) \notin \rho$, *T:* $(a,b), (b,c) \in \rho \implies a \leq 1, 1 \leq c \implies (a,c) \in \rho$.

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{\emptyset, A\}) \cap \mathcal{P}(\{\emptyset, B\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)
Řešení: Množina má 4 *prvky pokud* $A = B \neq \emptyset$. *V jiném případě má množina* 2 *prvky. (Je rovna množině* $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.*)*

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí: $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$. *Důkaz:* $x \in (A - C) \cap (B - C) \iff (x \in A - C \wedge x \in B - C) \iff (x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B) \iff (x \in A \cap B \wedge x \notin C) \iff x \in (A \cap B) - C$.

5. (2 body) Nechť je dána množina A, neprázdná množina I a systém množin $\{A_i | i \in I\}$. Dokažte, že potom

$$\bigcap_{i \in I} (A \div A_i) \subseteq A \div \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Důkaz: Nechť $x \in \bigcap_{i \in I} (A \div A_i)$. *Pak pro každé* $i \in I$ *platí* $x \in A \div A_i$, *tzn. buď* $x \in A \wedge x \notin A_i$ *nebo* $x \notin A \wedge x \in A_i$. *Rozlišíme dva případy* $x \in A$ *a* $x \notin A$ *a v obou ukážeme, že* $x \in A \div \bigcap_{i \in I} A_i$.
Nechť nejdříve $x \in A$. *Pak podle předchozího* $x \notin A_i$ *(pro libovolné* $i \in I$*) a tedy* $x \in A \wedge x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$. *Odtud* $x \in A \div \bigcap_{i \in I} A_i$.
Předpokládejme nyní, že $x \notin A$. *Pak podle předchozího* $x \in A_i$ *pro libovolné* $i \in I$ *a tedy* $x \notin A \wedge x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. *Odtud opět* $x \in A \div \bigcap_{i \in I} A_i$.

6. (3 body) Nechť A je množina. Dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A \times A)$ dané předpisem $f(B) = \{(a, b) \in A \times A \mid a, b \in B\}$ je injektivní.
Řešení: Z definice máme $f(B) = B \times B$. Ukážeme, že pro libovolné dvě podmnožiny B_1, B_2 množiny A platí $f(B_1) = f(B_2) \implies B_1 = B_2$.
Buď $b \in B_1$ libovolné. Potom $(b, b) \in f(B_1) = f(B_2)$. Odtud $b \in B_2$. Ukázali jsme, že $B_1 \subseteq B_2$. Stejným způsobem se ukáže opačná inkluze a máme tedy $B_1 = B_2$.
Rozhodněte, pro které množiny A je zobrazení f bijekce.
Řešení: Pro A prázdnou nebo jednoprvkovou.
V obou případech mají množiny $\mathcal{P}(A \times A)$ i $\mathcal{P}(A)$ stejný počet prvků a tudíž každé injektivní zobrazení mezi nimi je bijekcí.
Pokud množina A obsahuje alespoň dva různé prvky, řekněme a, b, pak snadno nahlédneme, že např. $\{(a, b)\}$ není obrazem žádné množiny B.

7. (3 body) Nechť je dána neprázdná konečná množina I a její prvek $j \in I$. Rozhodněte, pro které systémy množin $\{A_i | i \in I\}$ je projekce (na j-tou souřadnici) $p_j : \prod_{i \in I} A_i \to A_j$ bijekce.
Řešení: Připomeňme definici součinu: $\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(j) \in A_j$ pro libovolné $j \in I\}$. Nejdříve diskutujme případ kdy $A_k = \emptyset$ pro některé $k \in I$. Pak $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$ a má-li být p_j bijekce, pak nutně $A_j = \emptyset$. Snadno se vidí, že v tomto případě je skutečně p_j bijecí. (Je to prázdné zobrazení.)
Předpokládejme dále, že $A_i \neq \emptyset$ pro všechna $i \in I$. Pokud existuje $k \in I$, $k \neq j$ takové, že A_k má alespoň dva prvky, pak ukážeme, že p_j není bijekce. Volme nějaké k s touto vlastností. Nyní pro libovolné $f \in \prod_{i \in I} A_i$ označme $a = p_k(f)$. Protože A_k má alespoň dva prvky, existuje $b \in A_k$, $b \neq a$. Nyní můžeme definovat $g \in \prod_{i \in I} A_i$ takto: $g(k) = b$, $g(i) = f(i)$ pro ostatní $i \in I$ $(i \neq k)$. Snadno nalédneme, že $p_j(f) = p_j(g)$, přičemž $f \neq g$ a p_j není tudíž injektivní.
Chceme tedy aby pro libovolné $i \in I$, $i \neq j$ platilo A_i je jednoprvková množina. V tomto případě skutečně p_j bude bijekce.
Odpověď: p_j je bijekce právě tehdy, když $A_j = \emptyset$ nebo A_i jsou jednoprvkové pro všechna $i \neq j$. (Poznamenejme, že druhá možnost zahrnuje i případ $I = \{j\}$.

8. (5 bodů) Buď $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zobrazení dané předpisem $s(n) = n + 1$, tj. $s = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dále definujme relaci $R_<$ na množině $\mathbb{N}$ takto $R_< = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$.
Nalezněte: (Relace i zobrazení zadávejte vhodným předpisem (tj. množinově), nikoli obrázkem.)

(a) reflexivní relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R_< \subseteq R$;
Např: $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nebo $R_\leq = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$.

(b) symetrickou relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq s$;
Např: $R = \emptyset$.

(c) relaci R na množině $\mathbb{N}$ takovou, že $R \subseteq R_<$ a zároveň $R \circ R \neq R$;
Např: $R_<$ nebo $R = s$ nebo $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ nebo $R = \{(1, 2)\}$.

(d) zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je symetrickou relací a pro něž $f(n) \neq n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$;
Např: zobrazení f dané předpisem $f(n) = n + 1$ pro liché n a $f(n) = n - 1$ pro sudé n, tj. $f = \{(2k - 1, 2k) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{(2k, 2k - 1) \mid k \in \mathbb{N}\}$. Pozn: odpověď $f = \{(n + 1, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je chybná, neboť se nejedná o zobrazení.

(e) relaci R na množině $\mathbb{N}$, která není zobrazení, ale R^{-1} zobrazení je.
Např: $R = s^{-1}$ nebo $R = \{(1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.