Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **B**, 9. 11. 2010

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$,

(b) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \cup \emptyset = \{\emptyset\} \cap \emptyset$,

(c) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$,

(d) **ano** — **ne** $(\{\emptyset\}, \{\emptyset\}) \in \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech celých lichých čísel $L = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 2 \mid a^2 + b^2$			
$a \ \rho \ b \iff a + b > 0$			
$a \ \rho \ b \iff \lvert a\rvert - \lvert b\rvert < 0$			
$a \ \rho \ b \iff a^2 - b^2 = 1$			
$a \ \rho \ b \iff a + 2 \mid b$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(\{A\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$A \subseteq B \subseteq C \implies (D \cup B) - C = (D \cup A) - C.$$

5. (4 body) Buď $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $R = \{(1, 2), (3, 4), (4, 5)\}$.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) relaci $S \neq A \times A$ na množině A, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní a pro niž platí $R \subseteq S$;

(b) relaci f na množině A, která je zobrazení a pro niž platí $f \circ f \neq f \neq f \circ f \circ f$;

(c) tranzitivní relaci T na množině A takovou, že $T \circ T \subseteq S$;

(d) dvě relace S_1, S_2 na množině A takové, že $S_2 \circ S_1 = R$.

6. (3 body) Nechť pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ je dána množina B_m. Označme $A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$ a $B = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$. Rozhodněte, zda platí

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} (B_m \times A) \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} (B \times B_m) \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} (B \times B_m) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (B_m \times A) \ .$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Buď $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ bijektivní zobrazení dané předpisem $f(x) = 3x$. Buď dále $\beta : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ zobrazení definované takto: pro libovolné zobrazení $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $\beta(g) = f \circ g \circ f^{-1}$. Rozhodněte, zda β je surjektivní zobrazení.

Rozhodněte, zda β je injektivní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte!