Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **A**, 9. 11. 2010

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\})$,

(b) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \cap \emptyset = \{\emptyset\} \cup \emptyset$,

(c) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$,

(d) **ano** — **ne** $(\emptyset, \{\emptyset\}) \in \{\emptyset\} \times \{\{\emptyset\}\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech celých lichých čísel $L = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 2 \mid a + b$			
$a \ \rho \ b \iff ab > 0$			
$a \ \rho \ b \iff \lvert a - b \rvert \leq 3$			
$a \ \rho \ b \iff a^2 = b^2 + 2$			
$a \ \rho \ b \iff a \mid b + 1$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{A\}) \cap B$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C a D platí

$$A \subseteq B \subseteq C \implies (D \cap A) - B = (D \cap B) - C.$$

5. (4 body) Buď $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $S = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) relaci $R \neq A \times A$ na množině A, která je reflexivní, symetrická, tranzitivní a pro niž platí $S \subseteq R$;

(b) relaci g na množině A, která je zobrazení a pro niž platí $g \circ g \neq g = g \circ g \circ g$;

(c) dvě relace R_1, R_2 na množině A takové, že $R_1 \circ R_2 = S$;

(d) symetrickou relaci T na množině A takovou, že $T \circ T \subseteq S$.

6. (3 body) Nechť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je dána množina A_n. Označme $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ a $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times B) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \times A_n) \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \times A_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times B) \ .$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Buď $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ bijektivní zobrazení dané předpisem $g(x) = -2x$. Buď dále $\alpha : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ zobrazení definované takto: pro libovolné zobrazení $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $\alpha(f) = g^{-1} \circ f \circ g$. Rozhodněte, zda α je injektivní zobrazení.

Rozhodněte, zda α je surjektivní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte!