# Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, 9. 11. 2010

## Skupina A – modrá

1. ne, ne, ano, ano

2. (po řádcích) ano, ano, ano; ano, ano, ano; ano, ano, ne; ne, ano, ano; ne, ne, ne.

3.Pokud $\emptyset \in B$ a $\{A\} \in B$ pak 2 prvky;
pokud $\emptyset \in B$ a $\{A\} \notin B$ pak 1 prvek;
pokud $\emptyset \notin B$ a $\{A\} \in B$ pak 1 prvek;
pokud $\emptyset \notin B$ a $\{A\} \notin B$ pak 0 prvků;

4. Z předpokladu $x \in (D \cap A) - B$ odvodíme $x \in A \wedge x \notin B$, což nemůže nastat, neboť $A \subseteq B$. Tedy takové $x$ neexistuje a $(D \cap A) - B = \emptyset$. Totéž se odvodí pro množinu $(D \cap B) - C$. Obě množiny se tedy rovnají prázdné množině.

5. např. a) $R = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$;
b) $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;
c) $R_1 = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$, $R_2 = S$;
d) $T = \emptyset$.

6. U obou otázek je odpověď ano. V podstatě se napočítá, že obě množiny jsou rovny množině $A \times B$.

7. U obou otázek je odpověď ano. Můžeme například uvažovat zobrazení $\beta : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ definované takto: pro libovolné zobrazení $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $\beta(f) = g \circ f \circ g^{-1}$. Pro něj se pak snadno ověří — vzhledem k faktu, že $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{Q}}$ — rovnosti $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta = id_{\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}$. Proto je $\beta$ inverzní zobrazení k $\alpha$, které je bijekcí.

Samozřejmě lze zdůvodnit i zvlášť injektivitu a surjektivitu — zde je pak ve zdůvodnění implicitně používáno zobrazení $\beta$.

# Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, 9. 11. 2010

## Skupina B – bílá

1. ano, ne, ano, ne.

2. (po řádcích) ano, ano, ano; ne, ano, ne; ne, ne, ano; ne, ano, ano; ne, ne, ne.

3.Pokud $A \in B$ pak 2 prvky, jinak 1 prvek.

4. Z předpokladu $x \in (D \cup B) - C$ odvodíme postupně $x \in D \wedge x \notin C$, odkud dostaneme $x \in (D \cup A) - C$. Proto $(D \cup B) - C \subseteq (D \cup A) - C$. Stejně se dokáže druhá inkluze. V podstatě se tedy dokáže, že obě množiny jsou rovny množině $D - C$, protože se dokázalo, že $(D \cup B) - C \subseteq D - C \subseteq (D \cup A) - C$ a $(D \cup A) - C \subseteq D - C \subseteq (D \cup B) - C$.

Pozor: častá chyba byla, že se dokázaly pouze dvě inkluze: $(D \cup B) - C \subseteq D - C$ a $(D \cup A) - C \subseteq D - C$ což nestačí k tvrzení $(D \cup B) - C = (D \cup A) - C$.

5. např. a) $R = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\} \times \{3, 4, 5\}$;
b) $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$;
c) $T = \emptyset$;
d) $S_1 = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$, $S_2 = R$.

6. U obou otázek je odpověď ano. V podstatě se napočítá, že obě množiny jsou rovny množině $B \times A$.

7. U obou otázek je odpověď ano. Můžeme například uvažovat zobrazení $\alpha : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ definované takto: pro libovolné zobrazení $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $\alpha(g) = f^{-1} \circ g \circ f$. Pro něj se pak snadno ověří — vzhledem k faktu, že $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{Q}}$ — rovnosti $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta = id_{\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}$. Proto je $\alpha$ inverzní zobrazení k $\beta$, které je bijekcí.

Samozřejmě lze zdůvodnit i zvlášť injektivitu a surjektivitu — zde je pak ve zdůvodnění implicitně používáno zobrazení $\alpha$.

# Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, 9. 11. 2010

## Skupina C – žlutá

1. ano, ne, ne, ne.

2. (po řádcích) ano, ano, ano; ano, ano, ne; ne, ne, ano; ne, ano, ano; ne, ne, ne.

3. Pokud $B \in A$ pak 0 prvků, jinak 1 prvek.

4. Z předpokladu $x \in (A \cap B) - C$ odvodíme $x \in B \wedge x \notin C$, což nemůže nastat, neboť $B \subseteq C$. Tedy takové $x$ neexistuje a $(A \cap B) - C = \emptyset$. Totéž se odvodí pro množinu $(A \cap C) - D$. Obě množiny se tedy rovnají prázdné množině.

5. např. a) $R = \emptyset$;
b) $T = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \times \{4, 5, 6\}$;
c) $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$;
d) $R_1 = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$, $R_2 = S$.

6. U obou otázek je odpověď ano. V podstatě se napočítá, že obě množiny jsou rovny množině $C \times D$.

7. U obou otázek je odpověď ano. Můžeme například uvažovat zobrazení $g : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ definované takto: pro libovolné zobrazení $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $g(\alpha) = \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}$. Pro něj se pak snadno ověří — vzhledem k faktu, že $\beta \circ \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta = id_{\mathbb{Q}}$ — rovnosti $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}$. Proto je $g$ inverzní zobrazení k $f$, které je bijekcí.

Samozřejmě lze zdůvodnit i zvlášť injektivitu a surjektivitu — zde je pak ve zdůvodnění implicitně používáno zobrazení $g$.

# Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, 9. 11. 2010

## Skupina D – zelená

1. ano, ne, ano, ano.

2. (po řádcích) ano, ano, ano; ano, ne, ano; ne, ano, ne; ne, ano, ano; ne, ne, ne.

3. Pokud $A = B$ pak 0 prvků, jinak 1 prvek.

4. Z předpokladu $x \in (A \cup C) - D$ odvodíme postupně $x \in A \wedge x \notin D$, odkud dostaneme $x \in (A \cup B) - D$. Proto $(A \cup C) - D \subseteq (A \cup B) - D$. Stejně se dokáže druhá inkluze. V podstatě se tedy dokáže, že obě množiny jsou rovny množině $A - D$, protože se dokázalo, že $(A \cup C) - D \subseteq A - D \subseteq (A \cup B) - D$ a $(A \cup B) - D \subseteq A - D \subseteq (A \cup C) - D$.

Pozor: častá chyba byla, že se dokázaly pouze dvě inkluze: $(A \cup C) - D \subseteq A - D$ a $(A \cup B) - D \subseteq A - D$ což nestačí k tvrzení $(A \cup C) - D = (A \cup B) - D$.

5. např. a) $T = \emptyset$;
b) $R = \{1, 4, 5\} \times \{1, 4, 5\} \cup \{2, 3\} \times \{2, 3\}$;
c) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$;
d) $S_1 = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$, $S_2 = R$.

6. U obou otázek je odpověď ano. V podstatě se napočítá, že obě množiny jsou rovny množině $C \times D$.

7. U obou otázek je odpověď ano. Můžeme například uvažovat zobrazení $f : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ definované takto: pro libovolné zobrazení $\beta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ klademe $f(\beta) = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \alpha$. Pro něj se pak snadno ověří — vzhledem k faktu, že $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = id_{\mathbb{Q}}$ — rovnosti $g \circ f = f \circ g = id_{\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}}$. Proto je $f$ inverzní zobrazení k $g$, které je bijekcí.

Samozřejmě lze zdůvodnit i zvlášť injektivitu a surjektivitu — zde je pak ve zdůvodnění implicitně používáno zobrazení $f$.