Základy matematiky — podzim 2010 — 1. opravný termín — 3.2.2011 — část 1

Jméno:. . . . .

UČO: . . . .

test		Hodnocení				*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ±1 bod (správně 1 bod, chybně −1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Mezi množinami $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ existuje bijekce.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: f, g jsou surjektivní $\implies$ $g \circ f$ je surjektivní.

(c) **ano** — **ne** Každá lineárně uspořádaná množina má největší prvek.

(d) **ano** — **ne** Relace ρ na množině A je symetrická právě tehdy, když $\rho \subseteq \rho^{-1}$.

(e) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak $(A, \geq)$ je také úplný svaz.

(f) **ano** — **ne** Pro libovolnou relaci ekvivalence R na množině $\mathbb{N}$ existuje prvek $n \in \mathbb{N}$ takový, že třída R_n příslušná tomuto prvku je nekonečná.

(g) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je těleso.

2. (7 bodů) Definujte formálně $\mathbb{Z}_n$ (množinu zbytkových tříd modulo n). Definujte operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_n$ a napište, co je třeba ukázat, aby tato definice byla korektní. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +)$ grupa a pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ těleso.

3. (3krát 2 body) Kolika způsoby lze z přirozených čísel menších nebo rovných 30 vybrat dvouprvkovou množinu čísel tak, aby

(a) jejich součet byl roven lichému číslu;

(b) jejich součin byl roven sudému číslu;

(c) jejich součet byl větší než jejich součin?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) nespočetné množiny a relace ekvivalence na ní, takové, že příslušný rozklad je spočetný;

(b) operace na množině přirozených čísel, která je asociativní, ale není komutativní;

(c) svazu, který není úplný svaz;

(d) relací $\rho \neq \sigma$ na množině $M = \{a, b\}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$;

(e) uspořádání množiny $\mathbb{N}$, kde existuje nekonečně mnoho maximálních prvků, nekonečně mnoho minimálních prvků a každý maximální prvek je větší než libovolný minimální.

Základy matematiky — podzim 2010 — 1. opravný termín — 3.2.2011 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $(a,b,c)\circ(d,e,f) = (ad, be, af + ce)$ pro $(a,b,c),(d,e,f) \in M$.
Rozhodněte, zda je $\circ$ komutativní operace.

Rozhodněte, zda je $\circ$ asociativní operace.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(M,\circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Kolik je rozkladů množiny M, které mají právě 2 třídy a obě třídy jsou čtyřprvkové.

Kolik je rozkladů množiny M, které mají právě 4 třídy a všechny třídy jsou dvouprvkové.

Kolik je rozkladů množiny M, které mají všechny třídy nejvýše dvouprvkové.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \iff (x + y = xy \vee x = y) \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R}$.

Popište rozklad $\mathbb{R} \backslash \rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Na množině $M = \mathcal{P}(A)$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \quad \Longleftrightarrow \quad (\ |X| < |Y| \ \vee \ X \subseteq Y\ ), \qquad \text{pro } X, Y \in M.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny M.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M, \preceq)$.

Určete pro která n je $\preceq$ lineární uspořádání?

Určete pro která n je $(M, \preceq)$ svaz?

Nechť zobrazení $f : M \to M$ je dáno vztahem $f(X) = \{1, 2, \ldots, |X|\}$. (Speciláně $f(\emptyset) = \emptyset$.) Rozhodněte, zda f je izotonní zobrazení $(M, \preceq)$ do sebe.

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Pro libovolnou relaci R na množině $\mathbb{N}$, tj. $R \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, definujeme zobrazení $\psi_R : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ předpisem $\psi_R(X) = X \div R$. Dále označme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ množinu všech symetrických relací na množině $\mathbb{N}$, dále $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ množinu všech tranzitivních relací na množině $\mathbb{N}$ a konečně $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ množinu všech reflexivních relací na množině $\mathbb{N}$.
Určete, pro které relace R je ψ_R zobrazení z $\mathcal{S}$ do sebe.

Určete, pro které relace R je ψ_R zobrazení z $\mathcal{T}$ do sebe.

Určete, pro které relace R je ψ_R zobrazení z $\mathcal{R}$ do sebe.

Určete, pro které relace R je ψ_R bijekcí z množiny $\mathcal{S}$ (resp.$\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$) do sebe.

Odpovědi zdůvodněte.
(Symbol $\div$ značí operaci symetrického rozdílu množin, tj. $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.)