Základy matematiky — podzim 2010 — 2. termín — 28.1.2011 — část 1

Jméno:..........................

UČO: ....

test		Hodnocení				*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Množina všech sudých celých čísel je spočetná.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolnou množinu A existuje bijekce $f : A \to A$ různá od identity na A.

(c) **ano** — **ne** Pokud je každý prvek uspořádané množiny $(A, \leq)$ maximální, pak je každý prvek v $(A, \leq)$ minimální.

(d) **ano** — **ne** Existuje úplný svaz takový, že supremum prázdné množiny je rovno infimu prázdné množiny.

(e) **ano** — **ne** $(\mathbb{R}^+, +)$ je grupa.

(f) **ano** — **ne** Pokud je binární relace R na množině A relace ekvivalence, pak $R = R^{-1}$.

(g) **ano** — **ne** Libovolné zobrazení z množiny A do množiny $\mathcal{P}(A)$ je injektivní.

2. (7 bodů) Definujte pojem grupa, komutativní grupa a izomorfismus grup. Definujte všechny užité pojmy.

3. (3krát 2 body) Maminka má právě 4 různé mince: 5kč, 10Kč, 20Kč a 50Kč, které rozdělí mezi 4 děti (žádnou minci si nenechá). Kolika způsoby to může maminka provést, pokud

(a) musí každé dítě dostat aspoň jednu minci;

(b) děti mohou dostat libovolný počet mincí (tedy i žádnou);

(c) právě jedno dítě nedostane nic?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) relace na dvouprvkové množině $\{a, b\}$, která není tranzitivní;

(b) surjektivního zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, které není injektivní;

(c) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{Z}$ tak, aby rozklad $\mathbb{Z}/\rho$ měl 3 třídy rozkladu a každá třída měla nekonečně mnoho prvků;

(d) binární operace na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není asociativní;

(e) uspořádání na množině komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Základy matematiky — podzim 2010 — 2. termín — 28.1.2011 — část 2

Jméno: . . . .

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 5b^2 = 1\}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem

$$(a,b) \circ (a',b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b), \text{ pro } (a,b),(a',b') \in M .$$

Dokažte, že $\circ$ je skutečně operace na množině M (tj. $x, y \in M \implies x \circ y \in M$).

Rozhodněte, zda je $\circ$ komutativní operace.

Rozhodněte, zda je $\circ$ asociativní operace.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Buď n přirozené číslo a uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Určete, kolik je zobrazení $f : A \times A \times A \to A$.

Určete, kolik z nich splňuje podmínku

$$(\forall a, b, c \in A)\ (\ f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)\ ).$$

Určete, kolik je ternárních operací na množině A splňujících podmínku

$$(\forall a, b, c \in A)\ (\ f(a, b, c) = f(b, c, a)\ ).$$

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{N}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$x \rho y \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \; (\; 2^m \mid x \iff 2^m \mid y \;) \; .$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{N}$.

Popište rozklad $\mathbb{N} \backslash \rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Připomeňme, že symbolem $\mathbb{N}$ označujeme množinu všech kladných celých čísel, tj. $0 \notin \mathbb{N}$. Dále $\leq$ značí uspořádání čísel podle velikosti.

Na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$(a, b) \preceq (c, d) \iff (a \leq c \wedge ab \leq cd), \text{ pro } a, b, c, d \in \mathbb{N}\ .$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$.

Je $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$ svaz?

Je zobrazení $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dané předpisem $\alpha((a, b)) = (b, a)$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$ do sebe?

Je zobrazení $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané předpisem $\beta((a, b)) = ab$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Pro libovolnou množinu $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definujeme zobrazení $\psi_M : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ předpisem $\psi_M(X) = X \div M$. Dále označme $\mathcal{Z}$ množinu všech zobrazení z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do sebe, tj.$\mathcal{Z} = \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$. Uvažme zobrazení $\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{Z}$ dané předpisem $\Psi(M) = \psi_M$.

Určete, pro které množiny M je zobrazení ψ_M injektivní.

Určete, pro které množiny M je zobrazení ψ_M surjektivní.

Určete, pro které množiny M je zobrazení ψ_M izotonní zobrazení z uspořádané množiny $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ do sebe.

Rozhodněte, zda je zobrazení $\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{Z}$ injektivní.

Rozhodněte, zda je zobrazení $\Psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{Z}$ surjektivní.

Odpovědi zdůvodněte.

(Symbol $\div$ značí operaci symetrického rozdílu množin, tj. $X \div Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.)