Základy matematiky — podzim 2010 — 1. termín — 20.1.2011 — část 1

Jméno: . . . .

UČO: . . . .

test		Hodnocení				*cel.suma*		*zn.*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Množina všech zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do sebe je nespočetná.

(b) **ano** — **ne** Pro libovolné množiny A, B, C a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je injektivní $\implies$ f a g jsou injektivní.

(c) **ano** — **ne** Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje uspořádání R množiny $\mathbb{N}$ takové, že n je největší prvek uspořádané množiny $(\mathbb{N}, R)$.

(d) **ano** — **ne** Má-li podmožina X uspořádané množiny infimum, pak má i supremum.

(e) **ano** — **ne** Okruh $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 11 je těleso.

(f) **ano** — **ne** Pokud binární relace R na množině A je reflexivní, pak R^{-1} je také reflexivní.

(g) **ano** — **ne** Existuje jediný izomorfismus uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$ do sebe.

2. (7 bodů) Definujte pojem rozkladu množiny A. Definujte pojem relace ekvivalence na množině A a rozklad příslušný této relaci (tzv. faktorová množina). Definujte projekci na faktorovou množinu příslušnou dané relaci ekvivalence.

3. (3krát 2 body) Maminka obléká dítěti bundu, šálu a čepici, přičemž má na výběr od každého druhu oblečení 4 barvy. Kolika způsoby může dítě obléct, tak aby

(a) — (bez omezení);

(b) nevybrala jednobarevnou kombinaci;

(c) použila právě dvě barvy?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) izotonního surjektivního zobrazení z $(\mathbb{Q}, \leq)$ do $(\mathbb{Z}, \leq)$;

(b) binární operace na množině $\mathbb{N}$, která není asociativní;

(c) relace ekvivalence ρ na množině $\mathbb{Q}$ takové, že $\mathbb{Q}/\rho$ má nekonečně mnoho tříd a každá třída je nekonečná;

(d) uspořádání na množině $\mathbb{N}$, které nemá žádný maximální ani minimální prvek;

(e) konečné množiny A takové, že počet jejích dvouprvkových podmnožin je roven počtu jejích tříprvkových podmnožin.

Základy matematiky — podzim 2010 — 1. termín — 20.1.2011 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 + b^2 = 1\}$ definujeme operaci $\circ$ vztahem $(a,b) \circ (c,d) = (ad + bc, bd - ac)$ pro $(a,b),(c,d) \in M$. Dokažte, že $\circ$ je skutečně operace na množině M (tj. $x, y \in M \implies x \circ y \in M$).

Rozhodněte, zda je $\circ$ komutativní operace.

Rozhodněte, zda je $\circ$ asociativní operace.

Rozhodněte, zda existuje pro operaci $\circ$ neutrální prvek.

Rozhodněte, zda je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Buď k a n pevně zvolená přirozená čísla, $k \geq 2$. Uvažujme množinu $A = \{1, 2, 3, \ldots, nk\}$. Určete, kolik je zobrazení $f : A \to A$ takových, že platí

$$(\forall a \in A) \ (\ \ k \mid a - f(a) \ \ ).$$

Určete, kolik z nich je bijekcí $f : A \to A$.

Určete, kolik z nich je izotonních zobrazení z $(A. \leq)$ do sebe.

Postup výpočtu komentujte. (Zde $\leq$ je uspořádání čísel podle velikosti.)

7. (10 bodů) Na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je definována binární relace ρ vztahem

$$X \,\rho\, Y \iff \quad (\ X = Y \quad \vee \quad (\ X \cup Y \text{ konečná} \quad \wedge \ minX = minY\ )\ )\ .$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Popište rozklad $\mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\rho$.

Určete, kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Na množině $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$x \preceq y \iff (\exists k \in \mathbb{N})(y = k \cdot x), \qquad \text{pro } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání na množině $\mathbb{Q}^+$.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$.

Je $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$ svaz?

Je zobrazení $\alpha : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dané předpisem $\alpha(x) = x^2$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$ do sebe?

Je zobrazení $\beta : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dané předpisem $\beta(x) = x + 1$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$ do sebe?

Je zobrazení $\gamma : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dané předpisem $\gamma(x) = 2x$ izotonní zobrazení z $(\mathbb{Q}^+, \preceq)$ do sebe?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď dáno $n \in \mathbb{N}$ a množina $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ na níž uvažujeme uspořádání čísel podle velikosti $\leq$. Na množině $I = \{f \in A^A \mid f : (A, \leq) \to (A, \leq) \text{ izotonní } \}$ všech izotonních zobrazení z množiny A do sebe definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$f \preceq g \Longleftrightarrow (\forall x \in A)(f(x) \leq g(x)), \qquad \text{pro } f, g \in I.$$

Určete nejmenší a nejvtší prvek uspořádané množiny $(I, \preceq)$.

Rohodněte, zda je $(I, \preceq)$ úplný svaz.

Definujme dále zobrazení $\varphi : I \to I$ vztahem $\varphi(f) = f \circ f$. Dokažte, že φ je korektně definované zobrazení.

Rozhodněte, zda pro libovolné zobrazení $f \in I$ platí $f \preceq f \circ f$.

Rohodněte, zda je φ izotonní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte.