Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **D**, 9. 11. 2009

Jméno: ....

UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset - \{\emptyset\}\} - \emptyset$,

(b) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \times \emptyset = \{\emptyset\}$,

(c) **ano** — **ne** $\emptyset^A = \emptyset^\emptyset$, pro libovolnou neprázdnou množinu A,

(d) **ano** — **ne** $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech celých sudých čísel $S = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a\ \rho\ b \iff a \mid 2b$			
$a\ \rho\ b \iff a^2 + b^3 \neq 0$			
$a\ \rho\ b \iff \lvert a\rvert \leq b \wedge \lvert b\rvert \leq a$			
$a\ \rho\ b \iff 3 \mid 2a + 7b$			
$a\ \rho\ b \iff \lvert ab\rvert \leq 4$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{A\}\}) - \mathcal{P}(\{\emptyset, B\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí

$$(A - B) \cup (C - B) = (A \cup C) - B\ .$$

5. (4 body) Buď $f = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid\ b = -2a\ \}$ zobrazení z množiny $\mathbb{Z}$ do sebe.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) neprázdnou relaci $T \subseteq f$ na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $T \circ T \subseteq f$;

(b) relaci g na množině $\mathbb{Z}$, která je zobrazení a pro niž $f \circ g$ je tranzitivní relace;

(c) relaci h na množině $\mathbb{Z}$, která je surjektivní zobrazení a pro niž $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$;

(d) reflexivní relaci S na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $f \subseteq S$ a pro niž $S \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6. (3 body) Nechť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jsou dány množiny A_n a B_n.
Označme dále $I = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \neq j\}$.
Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{(i,j) \in I} (A_i - B_j) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i - \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \subseteq \bigcap_{(i,j) \in I} (A_i - B_j) \ .$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Uvažujme zobrazení $\beta : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dané následujícím předpisem. Pro množinu $R \subseteq A \times A$ platí

$$\beta(R) = \{ \ k \in \mathbb{N} \mid (\forall \ell \in \mathbb{N})(\ (k,\ell) \in R \implies (\ell,k) \notin R) \ \} \ .$$

Rozhodněte, zda β je injektivní zobrazení.

Rozhodněte, zda β je surjektivní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte!