Vnitrosemestrální písemka — Základy matematiky, **C**, 9. 11. 2009

Jméno: ....
UČO: ....

Hodnocení						

Na každý příklad získáte nezáporný počet bodů. Celkový součet bude zaokrouhlen na celé body. Maximum 20 bodů. Pro řešení použijte volné místo nebo druhou stranu. Na vypracování máte 90 min.

1. (2 body (za každou správnou odpověď 1/2, chybnou −1/2, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení:

(a) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\} - \emptyset\}$,

(b) **ano** — **ne** $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\} \neq \emptyset$,

(c) **ano** — **ne** $\emptyset^A = A^\emptyset$, pro libovolnou neprázdnou množinu A,

(d) **ano** — **ne** $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. (5 bodů (za každou správnou odpověď 1/3, chybnou −1/3, bez odpovědi 0)) Do každého pole tabulky doplňte **ano** (resp. **ne**), jestliže daná relace ρ na množině všech celých sudých čísel $S = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ splňuje (resp. nesplňuje) příslušnou vlastnost.

	reflexivní	symetrická	tranzitivní
$a \ \rho \ b \iff 3 \mid \frac{a}{2} + b$			
$a \ \rho \ b \iff ab \neq 0$			
$a \ \rho \ b \iff \lvert a\rvert \leq b$			
$a \ \rho \ b \iff 3a \mid b$			
$a \ \rho \ b \iff \lvert a - b\rvert \leq 2$			

3. (2 body) Určete kolik prvků má množina $\mathcal{P}(\{\emptyset, A\}) \cap \mathcal{P}(\{\emptyset, B\})$.
(Pozor, odpovědi se liší v závislosti na množinách A a B.)

4. (2 body) Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí

$$(C - B) \cap (C - A) = (C \cup B) - (A \cup B)\ .$$

5. (4 body) Buď $g = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \ b = 9a\ \}$ zobrazení z množiny $\mathbb{Z}$ do sebe.
Nalezněte: (Relace zadávejte množinově, nikoli obrázkem.)

(a) tranzitivní relaci R na množině $\mathbb{Z}$ takovou, že $g \subseteq R$ a pro niž $R \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(b) relaci f na množině $\mathbb{Z}$, která je zobrazení a pro niž $f \circ f = g$;

(c) relaci h na množině $\mathbb{Z}$, která je zobrazení a pro niž $h \circ g$ je symetrická relace;

(d) relaci $S \subseteq g$ na množině $\mathbb{Z}$, která je tranzitivní neprázdná relace.

6. (3 body) Nechť pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jsou dány množiny A_n a B_n.
Označme dále $I = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \neq j\}$.
Rozhodněte, zda platí

$$\bigcup_{(i,j)\in I} (A_i - B_j) \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i - \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \ .$$

Rozhodněte, zda platí

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i - \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I} (A_i - B_j) \ .$$

Odpovědi zdůvodněte!

7. (2 body) Uvažujme zobrazení $g : \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ dané následujícím předpisem. Pro množinu $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ platí

$$g(R) = \{ \ x \in \mathbb{N} \mid (\ \exists y \in \mathbb{N})(\ (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \wedge x \neq y \ ) \ \} \ .$$

Rozhodněte, zda g je injektivní zobrazení.

Rozhodněte, zda g je surjektivní zobrazení.

Odpovědi zdůvodněte!