Základy matematiky — podzim 2009 — 2. opravný termín — 11.2.2010 — část 1

Jméno: ....

test	1	2	3	4

1. (7krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0 — při záporném součtu se do celkového hodnocení započítá 0))
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Každá podmnožina množiny $\mathbb{R}$ je buď konečná nebo spočetná.

(b) **ano** — **ne** Jádro zobrazení $f : A \to B$ je symetrická relace na množině A.

(c) **ano** — **ne** Pro libovolnou binární relaci R na neprázdné množině A a pro každé dva prvky $a, b \in A$ platí právě jeden ze vztahů aRb, $aR^{-1}b$.

(d) **ano** — **ne** Pro libovolné uspořádané množiny $(A, \leq), (B, \leq), (C, \leq)$ a zobrazení $f : A \to B$, $g : B \to C$ platí: $g \circ f$ je izotonní $\implies$ f je izotonní.

(e) **ano** — **ne** Je-li R uspořádání množiny A, pak $R \cap R^{-1}$ je též uspořádání množiny A.

(f) **ano** — **ne** Je-li uspořádaná množina $(A, \leq)$ úplný svaz, pak $(A, \geq)$ je také úplný svaz.

(g) **ano** — **ne** Jestliže $(T, +, \cdot)$ je těleso, pak $(T, \cdot)$ je grupa.

2. (7 bodů) Definujte formálně $\mathbb{Z}_n$ (množinu zbytkových tříd modulo n). Definujte operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Z}_n$ a napište, co je třeba ukázat, aby tato definice byla korektní. Určete, pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +)$ grupa a pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ těleso.

3. (3krát 2 body) Ve frontě v bufetu stojí 5 studentek a 5 studentů. Kolik je všech možných postavení ve frontě, pokud

(a) napřed stojí studentky a poté studenti;

(b) bezprostředně před každým studentem stojí studentka;

(c) žádní dva studenti nestojí vedle sebe?

Odpověď:

a)	b)	c)

4. (5krát 2 body) Udejte příklad:

(a) izotonního zobrazení z $(\mathbb{R}, \leq)$ do $(\mathbb{Q}, \leq)$;

(b) nespočetné množiny a její spočetné podmnožiny;

(c) nekonečného tělesa;

(d) relací ρ a σ na množině $\mathbb{N}$ takových, že $\rho \circ \sigma = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \neq \sigma \circ \rho$;

(e) uspořádané pětiprvkové množiny, kde právě 2 prvky jsou maximální a právě 2 prvky jsou minimální.

Základy matematiky — podzim 2009 — 2. termín — 11.2.2010 — část 2

Jméno: ....

5	6	7	8	9

5. (10 bodů) Na množině $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definujeme binární operaci $\circ$ vztahem

$$(a, b) \circ (c, d) = (a + c + ac, b + d), \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že operace $\circ$ je asociativní.

Rozhodněte, zda je operace $\circ$ komutativní.

Existuje pro $\circ$ neutrální prvek?

Rozhodněte, zda je $(M, \circ)$ grupa.

Odpovědi zdůvodněte.

6. (10 bodů) Nechť $k \in \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, \ldots, k\}$. Kolik je rozkladů množiny A, které mají právě 2 třídy.

Kolik je rozkladů množiny A, které mají právě 3 třídy a prvky 1, 2 a 3 jsou v různých třídách.

Kolik je rozkladů množiny A, které mají právě 3 třídy, prvky 1 a 2 jsou v jedné třídě a prvek 3 je v jiné třídě.

Postup výpočtu komentujte.

7. (10 bodů) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je definována binární relace ρ vztahem

$$(a, b)\rho(c, d) \iff \{|a|, |b|\} = \{|c|, |d|\}, \qquad \text{pro } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dokažte, že ρ je relace ekvivalence na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Popište rozklad $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \rho$.

Určete kolik má tento rozklad tříd a kolik prvků mají jednotlivé třídy.

8. (10 bodů) Buď $n \in \mathbb{N}$ a označme $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dále uvažujme množinu M_n neprázdných podmnožin množiny A_n, tj. $M_n = \mathcal{P}(A_n) - \{\emptyset\}$. Pro prvek $X \in M_n$ definujeme součet $s(X)$ a průměrnou hodnotu $p(X)$ množiny X, přesněji pro k prvkovou neprázdnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq A_n$ označíme $s(X) = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \in \mathbb{N}$ a $p(X) = \frac{s(X)}{k} \in \mathbb{Q}$. Na množině $M_n = P(A) - \{\emptyset\}$ definujeme binární relaci $\preceq$ takto:

$$X \preceq Y \quad \Longleftrightarrow \quad (\ s(X) < s(Y)\ \vee (s(X) = s(Y) \wedge p(X) < p(Y))\ \vee\ X = Y\ ), \qquad \text{pro } X, Y \in M_n.$$

Dokažte, že $\preceq$ je uspořádání množiny M_n.

Nalezněte všechny minimální a maximální prvky uspořádané množiny $(M_n, \preceq)$.

Je zobrazení $\alpha : M_{100} \to \mathbb{N}$ dané předpisem $\alpha(X) = s(X)$ izotonní zobrazení z $(M_{100}, \preceq)$ do $(\mathbb{N}, \leq)$?

Je zobrazení $\beta : M_{30} \to \mathbb{Q}$ dané předpisem $\beta(X) = p(X)$ izotonní zobrazení z $(M_{30}, \preceq)$ do $(\mathbb{Q}, \leq)$?

Odpovědi zdůvodněte.

9. (10 bodů) Buď dána množina $M = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \{1,2,3\}$. Na množině M definujeme uspořádání $\preceq$ takto:

$$(X,m) \preceq (Y,n) \iff (X \subset Y \vee (X = Y \wedge m \leq n)), \qquad \text{pro } X,Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), m,n \in \{1,2,3\}\ .$$

Definujme dále zobrazení $f : M \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ předpisem $f((X,m)) = X \div \{m\}$.
Rozhodněte, zda je zobrazení f surjektivní.

Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní.

Je zobrazení $f : (M, \preceq) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ izotonní?

Rozhodněte, zda je $(M, \preceq)$ úplný svaz.

Odpovědi zdůvodněte.
(Pozn: Zápisem $X \subset Y$ rozumíme $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$; Relace $\leq$ na množině $\{1,2,3\}$ je uspořádání podle velikosti. Operace $\div$ je symetrický rozdíl, tj. pro množiny A, B máme $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$.)